
EVCLIDIS
ELEMENTORVM
Priores libri VI
In Gratiam Mathe-
matica Studio-
sorum
GENVAE
Superiorum Per-
missu
1644
VT
LATIVS
ILLVSTR
BIBLIOTECA NAZ



atq; ingentia aliorum volumina commentationibus eruditissimis ornabunt te, sed onerabunt etiam nimia prolixitate ingenium, maximè si nunc primum Problematibus, & Theorematibus Mathematicis assuescat. Libellus iste excussis digressionum omnium utilium alioqui, scolio-

liorumq; quorumcunq; phaleris natiua dumtaxat venustate conspicuus in tuas se manus ingerit : Procul hinc Poeticus, quem moueat alienis plummis denudata Cornicula risus. Siquidem Mathematica elementa numquam magis elegantia sunt quam cum nuda. Experi-

men-

Ad Lectorem.

GEometricorum elementorum Euclidis priores libros ſex mole quidem paruos, ſed virtute magnos facili abſque vllo claritatis diſpendio compendioſa explicatione exararos accipe Humaniſsime Lector. Permulta

Ad Lectorem.

GEometricorum elementorum Euclidis priores libros ſex mole quidem paruos, ſed virtute magnos facili abſque vllo claritatis diſpendio compendioſa explicatione exararos accipe Humaniſsime Lector. Permulta

Ad Lectorem.

GEometricorum elementorum Euclidis priores libros ſex mole quidem paruos, ſed virtute magnos facili abſque vllo claritatis diſpendio compendioſa explicatione exararos accipe Humaniſsime Lector. Permulta

Ad Lectorem.

GEometricorum elementorum Euclidis priores libros ſex mole quidem paruos, ſed virtute magnos facili abſque vllo claritatis diſpendio compendioſa explicatione exararos accipe Humaniſsime Lector. Permulta

atq; ingentia aliorum volumina commentationibus eruditissimis ornabunt te, sed onerabunt etiam nimia prolixitate ingenium, maximè si nunc primum Problematibus, & Theorematibus Mathematicis aßuescat. Libellus iste excussis digressionum omnium vtilium alioqui, scolio-

liorumq; quorumcunq; phaleris natiua dumtaxat venustate conspicuus in tuas se manus ingerit : Procul hinc Poeticus, quem moueat alienis plummis denudata Cornicula risus. Siquidem Mathematica elementa numquam magis elegantia sunt quam cum nuda. Experimen-

mentum tu ipse habebis plus quam satis euidens, si diurna, nocturnaq; manu eũdem euolueris; quam ne grauaret commodiori forma, utpote breuiori, excussum ideo sese offert: Duplici nec non si malueris distinctum volumine altero quidẽ propositionum explicatione, & altero figurarum

rum

rum delineatione contento, vt si quando à sẽsibili alterutrius speculatione ad intelligibilem congruenter magis ad Mathematicarum naturam animum auocare libuerit in hoc etiam adminiculo tibi, ac præsto sit. Altius enim hæc, stabiliusque insident animo, cum semel intellectu sola

figu-

figurarum inspectione iterum, aut bis repetũtur. Vtere igitur aliorum industria, ac labore ad mathematicas facultates omnes tibi præparato viæ compendio. Sitq; tibi Figura & gradus, non figura, & tres oboli. *Vale.*

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER PRIMVS.

DEFINITIONES.

1. PVnctum est cuius nulla pars est. *vt A.*
2. Linea vero longitudo latitudinis expers. *vt A B.*
3. Lineæ autem termini sunt puncta. *vt A & B*
4. Recta linea est, quę ex ęquo sua interiecet puncta, *quæ videlicet est talis, vt procedendo ab vno puncto extremo, ad alterum punctum, non discedamus neque ad hanc, neque ad illam partem, sed ex æquo*

procedamus, neque est plus lineæ ex vna parte, quam ex altera.

5. Superficies est, quæ longitudinem, latitudinemque tantum habet. *vt A B C D*

6. Superficiei autem extremà sunt lineæ.

7. Plana superficies est, quæ ex æquo suas interiecet lineas, *quod intelligitur eadem ratione, qua lineæ rectæ definitio.*

8. Planus vero angulus est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium alterius ad alteram inclinatio, *aduerte autem non hoc ita esse intelligendum, quasi vero angulus sint illæ duæ lineæ tãtũ: est enim etiã superficies lineis inclusa, seu area illa.*

9. Cum autem, quæ angulum con-

continent, lineæ rectæ fuerint rectilineus ille angulus appellatur. *vt CBA*.

10. Cum vero recta linea super rectam consistens lineā eos, qui sunt deinceps angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterq; æqualium angulorum, & quæ insistit recta, linea dicitur perpendicularis illi lineæ cui insistit, *vt est linea A B, qua ita cadit super lineam C D, vt faciat duos angulos ex vtraque parte, æquè accuminatos; hoc est enim esse æquales*.

11. Obtusus angulus est, qui recto maior est; *hoc est minus accuminatus. vt E B D.*

12. Acutus vero, qui minor est recto, *idest magis accuminatus, vt EBC.*

13. Terminus est, quod alicuius extremum est.

14. Figura est, quæ sub aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur, *intellige linearibus non punctualibus.*

15. Circulus est figura plana, sub vna linea comprehensa, quæ peripherea appellatur; ad quam ab vno puncto eorum, quę intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectę lineę inter se sunt ęquales, *ex quo aduerte circulum esse aream linea illa inclusam non lineam includentem, vt etiam figura est, qua includitur terminis. vt A C E B C.*

16. Hoc vero punctum centrũ circuli appellatur. *vt D.*

17. Diameter autem circuli est recta quædam linea per cẽtrum dicta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat. *Hoc est in duas par-*

partes æquales, hoc enim est bifariam secare, vt A B.

18. Semicirculus verò est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur *à diametro, vt AGB.*

19. Rectilineæ figuræ sunt, quę sub rectis lineis cõtinentur, *hoc est terminantur rectis lineis.*

20. Trilaterę quidem, quæ sub tribus.

21. Quadrilaterę, quæ sub quatuor.

22. Multilaterę autem, quę sub pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

23. Trilaterarum autem figurarum, æquilaterũ est triangulum, quod tria latera habet æqualia. *vt ABC.*

24. Isosceles autem, quod duo

tantum æqualia habet latera, *vt CBA*

25 Scalenum verò eſt, quod tria inæqualia habet latera, *vt EDF. et ſic diuiduntur triãgula ratione laterum: ratione verò angulorum iterum.*

26. Trilaterarum figurarum, rectangulum quidem triangulum eſt, quod vnum habet angulum rectum, *vt EDF*

27. Amblygonium, quod obtuſum angulum habet: *ſeu vnum maiorem recto, vt LMH.*

28 Oxygonium quod tres habet acutos angulos, *vt IHG*

29. Quadrilaterarum autem figurarum, quadratum quidem eſt, quod & æquilaterum, & rectangulum eſt, *habens angulos rectos, & latera æqualia, vt eſt in figura ABCD*

30. Altera verò parte longior figura eſt, quæ rectangula

qui-

quidem at æquilatera non est, *vt in figura EFHG*

31. Rhombus autem, quę ęquilatera, sed rectangula non est, *vt IKML.*

32. Rhomboides verò, quę aduersa, & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula, *vt PNOQ*

33. Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapetia appellantur, *vt TRSV*

34. Parallelę rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex vtraque in infinitū producantur parte in neutram, sibi mutuo incidunt, *quod intellige de lineis rectis, & curuis circa idem centrum.*

35. Parallelogrammum est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt paralella, seu æquidistantia.

36. Cum verò in Parallelogrãmo diameter ducta fuerit duæq; lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in vno eodemque puncto: ita vt, parallelogrammum ab his parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma appellātur duo illa, per quæ diameter non transit complementa, duo vero reliqua per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur, *vt in fig. ABDC.*

Petitiones siue postulata.

1. Postuletur, vt à quouis puncto in quoduis punctum rectam lineam ducere concedatur, *vt ab A ad BCD*
2. Et rectam lineam terminatam in continuum, seu in directum vlterius producere. *vt AB ad C. & AC ad D.*
3. Item quo vis centro, & interuallo circulũ describere.

vt AE, AD, AC, AB.

4. Item quacumque magnitudine data finita ſumi poſſe aliam magnitudinem, vel maiorẽ, vel minorem, vt data AB ſumere CD vel EF.

Communes notiones, ſiue Axiomata.

1. QVæ eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia, & quod vno æqualium maius eſt, aut minus, maius quoque eſt, aut minus altero æqualium; & ſi vnum æqualium maius eſt, aut minus magnitudine quapiam; alterum quoque æqualium eadem magnitudine maius eſt, aut minus *reſpectiuè. vide in libello Fig. pag. 6.*
2. Si æqualibus æqualia adiecta ſint, tota ſunt æqualia.
3. Si ab æqualibus æqualia ablata ſint, quæ relinquuntur ſunt æqualia.

4. Si inæqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt inæqualia; & si inæqualibus inęqualia adiecta sint maiori maius, & minori minus, remanent inæqualia.

5 Si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inęqualia; etsi ab inæqualibus inæqualia ablata sint à maiori minus, à minori maius, reliqua sunt inæqualia.

6. Quæ eiusdẽ duplicia sunt, inter se sunt æqualia, & quod vnius æqualiũ duplum est, duplum est & alterius.

7. Quæ eiusdem sunt dimidia, inter se sunt æqualia; & cõtra.

8. Quæ sibi mutuo congruunt inter se sunt æqualia.

9. Totum est maius sua parte.

10. Duæ lineæ rectæ non habent commune segmentum, *vt pag.6. BD,CD*

11. Duæ rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ necessario in illo puncto se mutuo secabunt.

12. Omnes anguli recti sunt inter se æquales.

13. Si in duas rectas lineas altèra recta incidēs internos, & ad easdem partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineę in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores. *si enim sint æquales duobus rectis probabitur infra, quod nõ coincident, si sint maiores duobus rectis, constabit ex dicendis, quod ab inuicem discedent, ergo si sint minores coincident.*

14. Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt; *manendo in sua rectitudine, non*

claudunt aream, non figuram formant, vt AB, CB

15. Si æqualibus inæqualia adijciantur, erit totorum excessus adiūctorum excessui æqualis.

16. Si inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus excessui eorum, quę à principio erant, æqualis.

17. Si ab æqualibus inæqualia demantur, erit residuorum excessus excessui ablatorum æqualis.

18. Si ab inæqualibus æqualia demantur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis.

19. Omne totum ęquale est omnibus suis partib. simul sumptis.

20. Si totum totius est duplū, & ablatum ablati, & reliquū reliqui erit duplum.

PRO-

PROBLEMA I.

PROPOSITIO PRIMA.

Super data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere.

SIt data recta linea terminata A B, super quam cõstruere iubemur triangulum æquilaterum. facto centro in A, ad interuallum A B; describatur circulus C B D, & facto centro in B, ad interuallum pariter B A, describatur alter circulus C A D, secans priorem in C, tum ex puncto intersectionis C. ducatur vna linea ad A. altera ad B, dico factum esse triangulum æquilaterum super datam rectam lineam finitam A B. quoniam enim

enim A B, & A C, sunt duæ rectæ lineæ a centro A. ad circumferētiam eamdē, erunt inter se ęquales. rurs⁹ quia rectę BC, BA ducũtur ex cētro B. ad circumferentiam eamdē erunt æquales inter se: cum igitur tam B C, quam A C. sint æquales ipsi A B. erunt & inter se ęquales. factum igitur est, quod erat faciendum. Patet hinc aditus etiam ad triangula alterius generis facienda, vt in lib. Tig. pag. 7.

PROBLEMA II.
PROPOSITIO II.

Ad datum punctum data recta linea æqualem rectam lineam ponere.

Sit data linea B C; & sit datum punctum A. à quo pun-

punĉto incipere debeat alia linea æqualis ipsi B C. si non sit ducta linea ducatur à puncto A ad C. facto centro in C. interuallo C B. describatur circulus B, & super lineam C A, constructo triangulo æquilatere producatur latus D C, vsque ad circulum si opus sit. tũ facto centro in D. interuallo D E. describatur alter circulus E, & producatur latus DA, vsque in G. l. in F. Dico AG esse lineam imperatam, quoniam enim D E, D G. æquales sunt à centro D. ad eamdem circumferentiam ablatis D A, DC æqualibus lateribus trianguli æquilateri remanebit A G, C E æqualis. quod erat faciẽdum. nam CE est ęqualis CB, vt à centro C ad eamdem circumferentiam.

PRO-

PROBLEMA III.

PROPOSITIO III.

Duabus datis rectis lineis inaequalibus, de maiore aequalem minori detrahere.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A minor B C maior; vt ex maiore detrahatur linea ęqualis minori A. Fiat linea B E, ex puncto B, æqualis ipsi A, tum facto centro in B interuallo B E, describatur circulus F secans lineã C B in D, dico D B esse lineam imperatam. quoniam enim linea A, & linea B D sunt æquales [illegible] idẽ B E erunt æquales inter se linea A, & linea B D, quod erat faciendum.

THEO-

THEOREMA I.

PROPOSITIO IV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrunque vtrique, habeant verò angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum, et basim basi æqualem habebunt, eritque totum triangulum triangulo æquale, & anguli correspondentes æquales.

SInt duo triangula A B C, D E F, & latus B A vnius sit æquale lateri E D alterius, & C A. ipsi D. F: sit autem angulus B A C angulo E D F æqualis, dico & basim B C basi E F æqualem, & totum triangulum B A C triangulo E D F æqua-

æquale. quoniam enim recta A B rectæ D E ponitur æqualis, fit vt si altera superponi intelligatur alteri, collocato puncto A in D, ipsę sibi mutuo cõgruant, punctumq; B. cadet in puncto E, & si recta A C cadet super rectam D F, cum habeat extremum A in D, C cadet in F, & quia angulus B A C, supponitur angulo E D F æqualis, congruet cum altero angulo, & ita superpositis duobus his triangulis A cadet in D; B in E; C in F, ergo, & basis B. C congruet cum basi E F: si enim caderet supra, aut infra, duæ rectæ lineæ superficiem clauderent. quod est absurdum; & basis igitur, & omnes anguli correspondentes, qui æqualibus continentur lateribus sunt inter se æquales, & congruunt, quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA II.

PROPOSITIO V.

Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt anguli, inter se sunt æquales, & productis æqualibus lateribus, qui sub basi fiunt anguli inter se æquales erunt.

SIt triangulum Isosceles A B C in quo latera AB, AC sint æqualia inter se. dico angulos A B C; A C B inter se æquales esse item si latera AB, A C producãtur, angulos quoque infra basim DBC; ECB inter se æquales esse. Ex linea enim A B producta sumatur A D cui abscindatur ex altera producta infinite, id est, vt non possit deesse, linea A E equa-

lis ipsi A D, & ducantur rectæ B E, C D. Considerentur iam duo triangula ABE, ACD, quæ habent conditiones quartæ; latus enim A B est æquale lateri A C, quia sunt latera triãguli Isoscelis, & latus A E est æquale lateri A D ex constructione, & angulus B A E est æqualis angulo C A D est enim angulus communis vtrique triangulo, ergo & basis C D est æqualis basi B E, & angulus A E B est æqualis angulo ADC, & angulus ABE est ęqualis angulo A CD, considerentur iam duo triangula B C D, & C B E, quæ pariter habent conditiones quartæ; latus enim D C monstratum est æquale lateri B E, & cum A D, A E sint æqualia ex constructione, si auferantur BA, CA auferuntur partes æquales, remanebunt

igitur

igitur B D, C E latera equalia, & angulus B D C monstratus est æqualis angulo C E B: ergo angulus D B C infra basim in triangulo Isoscele est æqualis angulo B C E pariter infra basim, & angulus BCD est æqualis angulo CBE. Et quoniam totus angulus A C D monstratus est æqualis angulo ABE si auferantur partes æquales, nimirum C B E ab angulo ABE, & angulus B C D ab angulo A CD, remanebunt anguli ad basim ABC, ACB æquales, quod erat demonstrandum.

THEOREMA III.

PROPOSITIO VI.

Si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint, & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

IN triangulo ABC sint duo anguli ABC; ACB super latus B C æquales. dico & duo latera illis opposita AB.AC esse æqualia. Si enim non dicuntur equalia, sit AB maius quam AC, ex quo abscindatur B D æqualis rectæ A C, ducaturq; recta CD, & considerentur duo triangula ACB,DBC; quæ, ex illa suppositione essent æqualia, haberent enim proprietates quartæ; nam D B dicitur æqualis ipsi A C; B C est com-

communis; angulus DBC supponitur æqualis angulo A C B: ergo triangulum DBC erit æquale triangulo ABC pars toti, quod est impossibile, ergo illa latera erant æqualia, quod erat demonstrandum.

THEOREMA IV.

PROPOSITIO VII.

Super eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ æquales vtraque vtrique non constituentur ad aliud, atque aliud punctum ad easdem partes.

SVper recta A B sint ductæ duæ rectæ lineæ A C, B C, quæ concurrant in puncto C, dico super eandem rectam A B non posse duci alias duas lineas æquales prioribus vtraque

que vtrique, quæ concurrant ad aliud punctũ, quam ad punctum C, si ducantur ad easdem partes: si enim possunt duci, ducantur; & cadant in puncto D. linea igitur A C, supponitur æqualis lineæ AD, & BC ipsi BD: ergo ductà CD, triãgulum ADC est Isosceles, ergo anguli A C D; A D C sunt æquales: similiter triangulum BDC est Isosceles; ergo anguli EDC, FCE infra basim sunt æquales, sed angulus A D C est minor angulo E D C pars toto; ergo etiam est minor angulo F C D, qui ponitur equalis angulo E D C sed angulus A E C ponitur æqualis angulo A C E, & iam ostenditur minor angulo F C E, qui est illius pars: ergo est æqualis toto, & minor parte, ergo pars est maior, quam totum. non igitur concurrent ad punctum D,

D, quod erat demonstrandum.

THEOREMA V.

PROPOSITIO VIII.

Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus vtrunque vtriq; æqualia, habuerint vero, & basim basi æqualem; angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

SInt duo latera AB, AC triãguli A B C duobus lateribus DA, D B trianguli D A B ęqualia, vtrunque, vtrique, ideſt vnum vni, alterum alteri, ſit autem Baſis B C Baſi A B æqualis, dico angulum A æqualem eſſe angulo D. intelligatur e-

enim basis B C superponi Basi A B, cum sint æquales congruent, punctum B, puncto A, & C. puncto B cogitetur triãgulum A B C cadere super triãgulum D A B, non cadet punctum A, nisi super punctum D, alioquin duæ rectæ lineæ ductæ ad easdem partes æquales prioribus concurrent ad aliud punctum, quod est impossibile, cum igitur anguli congruant, æquales inter se erunt, quod erat demonstrandum.

PROBLEMA IV.

PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilinium Bifariam secare.

SIt datus angulus B A C diuidendus in duas partes equa-

æquales. sumantur A D, A E æquales lineæ, & ducatur recta D E super quam constituatur triangulum æquilaterum D F E, & ab angulo F ad A ducatur F A. dico hanc lineam secare angulum B A C in duas partes æquales. quoniam enim triangulum F D A. habet duo latera duobus lateribus ęqualia triangulo F E A. vtrunque vtrique, & basim basi æqualem latus enim F D est ęquale lateri F E trianguli æquilateri, D A est ęquale E A. linea F A est basis communis; ergo angulus BAF est ęqualis angulo CAF, quod erat faciendum.

PROBLEMA V.

PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam finitam bifariam secare.

SIt data recta linea D E bifariam diuidenda. Constitue super eam triangulum equilaterum D A E, deinde diuide angulum D A E bifariam per A F dico lineam D E esse diuisam bifariam in G. triangula enim A D G, A E G habent cõditiones quartæ; latus enim A D est equale lateri A E, A G est commune; angulus D A G factus est equalis angulo EAG ergo linea D G est equalis lineę E G, quod erat faciendum.

PRO-

PROBLEMA VI.

PROPOSITIO XI.

Data recta linea, à puncto in ea dato rectam lineam ad angulos rectos excitare.

Sit data recta D E, in ea punctum G, à quo excitanda sit G A perpendicularis ipsi D E. sumantur duæ equales vtrinque DG, G E. & super totam D E constitue triangulum equilaterum D A E, tum ab angulo A ad G duc A G, hanc dico esse perpẽdicularem: duo enim triangula D A G, G A E habent conditiones octauę D A est equale lateri A E, G D est equale ipsi G E, G A est commune, ergo anguli sunt equales; ergo angulus D G A est e-

 qualis

qualis angulo E G A. ergo linea G A est perpendicularis, quod erat faciendum.

PROBLEMA VII.

PROPOSITIO XII.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

SIt data recta A B, & datum punctum C, ex quo super A B, demittenda sit perpendicularis. facto centro in C describatur circulus tantæ magnitudinis, vt abscindatur pars aliqua datæ lineæ AB puta D E. diuidatur autem linea bifariam in F, & à puncto C ducatur linea ad F. hanc dico esse perpendicularem, quoniam

nã enim duo triangula C E F, C D F habent conditiones octauę latus enim C D, est ęquale lateri C E à centro ad circumferentiam ambo. D F est æquale F E ex constructione F C est commune. ergo angulus C F D est æqualis angulo CFE; ergo CF est perpendicularis, quod erat faciendum.

THEOREMA VI.

PROPOSITIO XIII.

Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales faciet.

SIt recta linea A B, quæ consistat super C D. dico vel efficere duos angulos rectos, si sit perpendicularis, vel ęquales

duobus rectis, si non sit perpendicularis. educatur enim EB ex E perpendicularis ad CD; quoniam angulus rectus DBE æqualis est duobus angulis EBA, ABD, erunt apposito communi angulo recto EBC duo recti EBD. EBC tribus angulis CBE, EBA, ABD æquales: & quia angulus EBD est æqualis duobus angulis EBA, ABD; erunt apposito communi angulo EBC, duo anguli CBA, ABD æquales tribus CBE, EBA, ABD; sed illi tres erant equales duobus rectis, ergo etiam isti duo sunt æquales duobus rectis, quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA VII.

PROPOSITIO XIV.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps angulos duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt inter se illæ duæ rectæ lineæ.

SInt ductæ duæ rectæ lineæ ad punctum C in diuersas partes CD & CE facietes cum A B, angulos æquales duobus rectis D C A, A C E. dico lineã D C E esse vnam continuatam in directum productam. Si non est, producatur D C in directũ. & sit D C F. quoniam igitur super rectam D C F ex aduersario cadit recta A B faciet duos

angulos D C A, A C F æquales duobus rectis, sed etiam anguli D C A, A C E supponuntur æquales duobus rectis, ergo æquales inter se, & tamen hoc est totum, illud est pars; ergo pars est æqualis toti, quod est impossibile. ergo illa linea DCE est vna linea recta. quod erat demonstrandum.

THEOREMA VIII.

PROPOSITIO XV.

Si duæ rectæ lineæ se mutuò secẽt, angulos qui ad verticem sunt, æquales inter se efficient.

SI sint duæ rectæ A C, B D, quæ se mutuo secent in E. dico angulos ad verticem E ęquales esse, nimirum angulum A E D angulo C E B, & angulũ

DEC,

D E C, angulo A E B, cũ enim ſuper rectam A C cadit linea D B. anguli A E D, D E C erunt ęquales duobus rectis ſimiliter cum ſuper rectam D B cadat A C. erunt anguli D E A, A E B æquales duobus rectis, erunt igitur duo anguli A E B, D E A æquales duobus C E D, D E A. ablato igitur communi A E D, & conſequenter ab vtroque parte æquali, remanebit angulus A E B, æqualis angulo C E D eodem modo demonſtrabitur angulus D E A angulo B E C æqualis. quod erat faciendum.

THEOREMA IX.

PROPOSITIO XVI.

Cuiuscunque trianguli vno latere producto externus angulus vtrolibet interno, & opposito maior est.

SIt triangulum A B C, producto latere B A ad D. dico angulum externum D A C maiorem esse quolibet interno A B C, vel B C A, diuidatur enim C A bifariam in E, & ducatur ab angulo B ad E linea B E, quæ producatur extra triangulum in directum tantum, vt E F sit æqualis ipsi B E, & ducatur recta F A, & F A producatur vtcunque in I. quoniam igitur triangula B E C, A E F habent conditiones

nes quartę, latus enim B E eſt æquale ductum lateri E F, & ex diuiſione latus E C factum eſt æquale lateri E A, & angulus A E F eſt æqualis angulo ad verticem C E B: ergo angulus E C B eſt æqualis angulo F A E. ſed angulus D A C eſt maior angulo F A E, totum, parti; ergo eſt etiam maior angul. E C B equali F AE eodem modo oſtenditur angulus G A B maior angulo A B C, producendo latus C A, & ducẽdo lineam, vt factum eſt à B ab angulo C per H. diuiſo bifariã B A in H. quod erat demonſtrandum.

THEO-

THEOREMA X.

PROPOSITIO XVII.

Cuiuscumque trianguli duo anguli simul sumpti sunt minores duobus rectis.

IN triangulo A B C dico quoscunque duos angulos simul sumptos minores esse duobus rectis. producantur enim duo quæuis latera C B, C A, quoniam angulus A B D maior est interno, & opposito B A C, cum duo anguli ABD, A B C sint æquales duobus rectis, si loco anguli A B D ponatur angulus C A B minor illo, erunt duo anguli A B C, C A B minores duobus rectis. quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XI.

PROPOSITIO XVIII.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

SIt in triangulo A B C latus A C, maius latere A B. dico angulum ABC, subtensum à maiore latere maiorem esse: nam ex A C auferatur A D. æqualis ipsi AB,& ducatur recta BD, quoniam igitur duo latera AB, AD per constructionem sunt æqualia, erunt anguli ad basim ABD, ADB æquales, sed angulus ADB est maior angulo DCB. externus interno, & opposito in paruo triangulo; ergo etiam A B D est maior angulo DCB. ergo multo magis totus angulus ABC erit maior angu-
lo

lo ACB, quod erat demonſtrã-
dum, ex quo conſtat in trian-
gulo ſcaleno angulos eſſe inæ-
quales.

THEOREMA XII.

PROPOSITIO XIX.

Omnis trianguli maior angulus à maiore latere ſubtenditur.

IN triangulo ABC angulus B maior ſit angulo C. dico latus AC ſubtendens angulum maiorem maius eſſe: ſi enim nõ eſt maius, vel eſt æquale, vel minus: ſi eſt ęquale, ergo anguli BC ad baſim erunt æquales, ſed ſupponitur B maior. Si latus AC ſit minus latere AB. ergo angulus B minor erit angulo C, contra ſuppoſitum: ſi igitur non eſt nec æquale, nec

minus,

minus, erit maius. quod erat demonstrandum.

THEOREMA XIII.
PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli qualibet duo latera simul sumpta reliquo sunt maiora.

IN triangulo DBC dico quęlibet duo latera BD, DC simul maiora esse reliquo BC producatur enim CD vsque ad A, vt recta A D sit æqualis ipsi DB, ducaturque recta B A in triangulo igitur Isosceele A B D erunt anguli ad basim A B D, DAB æquales; angulus autem ABC maior est angulo ABD totum parte; ergo & latus CA maius erit latere BC, opposito ang. A.æquali angulo ABD, sed latus CA est æquale duobus late-

teribus BD, DC; cum BD sit æqualis ipsi DA, & DC commune; ergo duo latera BD,DC simul maiora sunt reliquo B C, quod erat demonstrandum.

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XXI.

Si super trianguli vno latere ab extremitatibus duæ rectæ lineæ ductæ fuerint, quæ interius iũgantur; Hæ lineæ reliquis triãguli duobus lateribus minores erunt, maiorem verò angulum continebunt.

SInt in triangulo ABC in extremitatibus B & C. constitutæ duæ rectæ lineæ, quæ iungantur intra triangulum ad punctum D dico BD,DC simul minores esse quam BA, A C simul; angulum vero BDC maiorem

iorem esse angulo BAC producatur enim BD vsque in E quoniam igitur in triangulo B A E duo latera BA, AE simul maiora sunt latere B E. erũt addito communi EC, tres lineæ B A, AE, EC maiores duabus BE, EC similiter in triangulo CDE maiora sunt duo latera CE, ED simul reliquo solo CD; ergo addito communi B D erunt tres lineæ CE, ED, DB maiores duabus CD, DB; ergo multo magis CD, DB minores erunt quam CA, AB; quod autem angulus sit maior patet; nam angulus DEC maior est angulo A, qui in triangulo BAE est internus, & oppositus; sed angulus BDC est externus angulo CED interno, & opposito, ergo est maior illo, ergo multo maior angulo A, quo adhuc ille est maior, quod erat demonstrandum.

PRO-

PROBLEMA VIII.

PROPOSITIO XXII.

Tribus datis rectis lineis, quarum duæ simul tertia sint maiores, triangulum constituere.

DEbent esse quælibet duæ lineę simul reliqua maiores, propter demonstrata ꝑpositione 20. sint igitur datæ tres rectæ lineæ A, B, C. ducatur DG linea in infinitum, hoc est, vt non possit ex illa deesse, & sumatur DF æqualis ipsi A, FG ęqualis ipsi B; & G H ęqualis ipsi C. tum facto centro in F ad interuallum F D describatur circulus, & facto centro in G interuallo G H describatur alter circulus, qui priorem secabit alioquin sola linea F G esset

esset vel æqualis, vel maior quam duæ simul GH, FD contra suppositum. ex puncto igitur K in quo se secant circuli ducantur duæ rectę KF, KG. dico triangulum esse constitutum tribus lineis, quę, datis sũt ęquales. nam KF est ęqualis FD à centro ad circumferentiam, cui etiam est ęqualis A. KG est ęqualis HG, cui etiam est ęqualis C, FG est ęqualis ipsi B. quod erat faciendum.

PROBLEMA IX.

PROPOSITIO XXIII.

Ad datam rectam lineam, datũq; in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit data recta linea AB, & in ea datum punctum C, in quo

quo constituendus sit angulus F E D equalis. Sumantur duę rectę EH, EG vtrinque, & ducatur recta HG, tum sumantur in recta A B ex puncto C tres lineę equales tribus C I equalis GE,CA,GH,IB,EH,& ex his tribus fiat triangulum IKC, & quoniam duo triangula C K I, GEH, habent conditiones octauę, tria latera tribus lateribus ęqualia, erit angulus GEH æqualis angulo I C K in dato puncto, quod erat faciendum.

THEO-

THEOREMA XV.

PROPOSITIO XXIV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunque vtrique, habuerint vero angulum angulo maiorem contentum æqualibus rectis lineis, & basim basi maiorem habebunt.

Sint duo latera AB, AC æqualia duobus lateribus DE, DH singula singulis angulus vero A maior sit angulo E, DH: dico & basim BC maiorem esse basi HE. constituatur enim angulus GDE æqualis angulo A. per lineam DG, quę fiat æqualis ipsi DH, & producatur recta GE. quoniam igitur duo triangula BAC, EDG habent con-

conditiones quartę, erit basi BC basi EG ęqualis, siue igitu dicatur linea EG cadere supr lineam HE siue nõ, semper HG apparebit minor quam EG; si enim congruit patenter excedet; si non congruit, vel non congruere dicatur, vt est EF, ducatur linea FG. quoniam enim duo latera DG, DF equalia dicuntur erunt anguli ad basim DGF, DFG ęquales, ergo angulus EGF, qui est minor angulo DGF erit etiam minor angulo DFG, ergo multo minor angulo totali EFG, ergo linea EG, quę subtenditur angulo maiori, erit maior linea EF; quę subtenditur minori. ergo etiam minor erit quam BC, quę monstrata est ęqualis ipsi GE, quod erat demonstrandũ.

THEO-

THEOREMA XVI

PROPOSITIO XXV

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint vtrunque vtrique, basim vero basi maiorem, et angulum angulo maiorem habebunt.

Sint duo latera AB,AC æqualia lateribus DE,DH singula singulis; basis vero sit basi maior, & angulus A erit maior angulo D. si enim dicatur æqualis, erit per quartam basis basi æqualis; si dicatur minor, erit basis BC per 24. basi H E minor; supponitur autem maior. ergo est maior, quod erat demonstrandum.

conditiones quartę, erit basis BC basi EG ęqualis, siue igitur dicatur linea EG cadere supra lineam HE siue nō, semper HG apparebit minor quam EG; si enim congruit patenter excedet; si non congruit, vel non congruere dicatur, vt est EF, ducatur linea FG. quoniam enim duo latera DG, DF ęqualia dicuntur erunt anguli ad basim DGF, DFG ęquales, ergo angulus EGF, qui est minor angulo DGF erit etiam minor angulo DFG, ergo multo minor angulo totali EFG, ergo linea EG, quę subtenditur angulo maiori, erit maior linea EF; quę subtenditur minori. ergo etiam minor erit quam BC, quę monstrata est ęqualis ipsi GE, quod erat demonstrandū.

THEO-

THEOREMA XVI

PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint vtrunque vtrique, basim vero basi maiorem, et angulum angulo maiorem habebunt.

Sint duo latera AB, AC æqualia lateribus DE, DH singula singulis; basis vero sit basi maior, & angulus A erit maior angulo D. si enim dicatur æqualis, erit per quartam basis basi æqualis; si dicatur minor, erit basis BC per 24. basi H E minor; supponitur autem maior. ergo est maior, quod erat demonstrandum.

conditiones quartę, erit basis BC basi EG ęqualis, siue igitur dicatur linea EG cadere supra lineam HE siue nō, semper HG apparebit minor quam EG; si enim congruit patenter excedet; si non congruit, vel non congruere dicatur, vt est EF, ducatur linea FG. quoniam enim duo latera DG, DF ęqualia dicuntur erunt anguli ad basim DGF, DFG ęquales, ergo angulus EGF, qui est minor angulo DGF erit etiam minor angulo DFG, ergo multo minor angulo totali EFG, ergo linea EG, quę subtenditur angulo maiori, erit maior linea EF; quę subtenditur minori, ergo etiam minor erit quam BC, quę monstrata est ęqualis ipsi GE, quod erat demonstrandū.

THEO-

THEOREMA XVI

PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint vtrunque vtrique, basim vero basi maiorem, et angulum angulo maiorem habebunt.

Sint duo latera AB, AC æqualia lateribus DE, DH singula singulis; basis vero sit basi maior, & angulus A erit maior angulo D. si enim dicatur æqualis, erit per quartam basis basi æqualis; si dicatur minor, erit basis BC per 24. basi H E minor; supponitur autem maior. ergo est maior, quod erat demonstrandum.

conditiones quartę, erit basis BC basi EG ęqualis, siue igitur dicatur linea EG cadere supra lineam HE siue nō, semper HG apparebit minor quam EG; si enim congruit patenter excedet; si non congruit, vel non congruere dicatur, vt est EF, ducatur linea FG. quoniam enim duo latera DG, DF ęqualia dicuntur erunt anguli ad basim DGF, DFG ęquales, ergo angulus EGF, qui est minor angulo DGF erit etiam minor angulo DFG, ergo multo minor angulo totali EFG, ergo linea EG, quę subtenditur angulo maiori, erit maior linea EF; quę subtenditur minori. ergo etiam minor erit quam BC, quę monstrata est ęqualis ipsi GE, quod erat demonstrandū.

THEO-

THEOREMA XVI

PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint vtrunque vtrique, basim vero basi maiorem, et angulum angulo maiorem habebunt.

Sint duo latera AB, AC æqualia lateribus DE, DH singula singulis; basis vero sit basi maior, & angulus A erit maior angulo D. si enim dicatur æqualis, erit per quartam basis basi æqualis; si dicatur minor, erit basis BC per 24. basi HE minor; supponitur autem maior. ergo est maior, quod erat demonstrandum.

conditiones quartę, erit basis BC basi EG ęqualis, siue igitur dicatur linea EG cadere supra lineam HE siue nō, semper HG apparebit minor quam EG; si enim congruit patenter excedet; si non congruit, vel non congruere dicatur, vt est EF, ducatur linea FG. quoniam enim duo latera DG, DF ęqualia dicuntur erunt anguli ad basim DGF, DFG ęquales, ergo angulus EGF, qui est minor angulo DGF erit etiam minor angulo DFG, ergo multo minor angulo totali EFG, ergo linea EG, quę subtenditur angulo maiori, erit maior linea EF; quę subtenditur minori. ergo etiam minor erit quam BC, quę monstrata est ęqualis ipsi GE, quod erat demonstrandū.

THEO-

THEOREMA XVI

PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint vtrunque vtrique, basim vero basi maiorem, et angulum angulo maiorem habebunt.

Sint duo latera AB, AC æqualia lateribus DE, DH singula singulis; basis vero sit basi maior, & angulus A erit maior angulo D. si enim dicatur æqualis, erit per quartam basis basi æqualis; si dicatur minor, erit basis BC per 24. basi HE minor; supponitur autem maior. ergo est maior, quod erat demonstrandum.

THEOREMA XVII.

PROPOSITIO XXVI.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint vtrunque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, quodcunque latus sit, habebunt & reliqua latera, et angulum angulo æqualem.

SInt duo anguli E. G. duobus angulis B,C ęquales, & sit latus B C lateri E G ęquale. dico reliqua latera reliquis lateribus æqualia, & angulum angulo. Si enim C A non est ęquale ipsi E D, sed dicitur maius sumatur ex maiore C A ęquale ipsi E D, & sit I C, & ducatur I B. quoniam autem duo triãgula IBC,

DEG habent conditiones 4. latus BC lateri EG, IC, ED æqualia, & angulus C angulo E ex suppositione, erit angulus IBC angulo DGE æqualis, sed etiam angulus ABC supponitur eidem equalis, ergo illi duo IBC, ABC erunt equales inter se, & pars esset equalis toti; ergo etiam latera, & angulus est equalis. quod erat demonstrandum.

THEOREMA XVIII.

PROPOSITIO XXVII.

Si in duas rectas lineas recta incidens alternatim angulos æquales inter se fecerit, Parallele erunt inter se rectæ lineæ.

Sint duo anguli BGM, CMG quos facit recta EH. in-

cidens in lineas AB, CD inter se equales, dico A B, C D parallelas: si enim non sunt parallelę productæ concurrent ad vnam ex partibus, & facient triangulum, verbi gratia, I M G in quo angulus externus L M C ęqualis esset vni ex internis, & oppositis IGM quod est impossibile. ergo non concurrent, neque facient triangulum, ergo sunt parallelæ, quod erat ostendendum.

THEO-

THEOREMA XIX.

PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas lineas recta incidens externum angulum interno, & opposito ad easdem partes æqualem fecerit, aut internos ad easdem partes duobus rectis æquales, parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SIt angulus EGA æqualis interno, & opposito ad easdem partes LMC. diço esse parallelas, nam anguli EGA, BGM ad verticem sunt æquales; ergo si ille est æqualis, etiam iste erit æqualis ipsi LMC, ergo per hoc erunt parallelę. Deinde sint anguli AGM, GMC ęquales duobus rectis, etiam anguli AGM, BGM sunt æquales duo-

bus rectis, ac proinde æquales inter se, ablato igitur communi AGM relinquetur B G M æqualis ipsi GMC alternatim posito; & ita per hoc erunt parallelæ. quod erat demonstrandum.

THEOREMA XX.

PROPOSITIO XXIX.

In parallelas recta incidens linea, & alternatim angulos inter se æquales efficiet, & externum interno ad easdem partes, & internos ad easdem partes duobus rectis æquales.

IN parallelis ABCD recta incidat E F. dico angulos alternos AGH, G H D inter se æquales, si enim non sunt æquales, sit maior AGH, addito com-

communi BGH, erunt AGH, HGB maiores, quam BGH. GHD: sed illi sunt duobus rectis æquales, ergo isti sunt minores duobus rectis; coibunt ergo lineæ, quod est contra suppositum. Est etiam angulus externus EGB æqualis interno, & opposito ad easdem partes GHD: si enim illi AGH est æqualis, cum huic EGB sit ad verticem erit etiam ipse illi æqualis, sic monstrabuntur anguli interni ad easdem partes duobus rectis æquales, cum duo AGH, BGH sint æquales duobus rectis, quod erat faciendum.

THEOREMA XXI.

PROPOSITIO XXX.

Lineæ, quæ sunt eidem parallelæ, inter se sunt parallelæ.

Lineæ AB,CD,sint paralellę eidem K I, vel CD. dico inter se esse parallelas,ducatur enim G H, quæ secet omnes: angulus BGL erit æqualis angulo GLK cum sint parallelæ, & huic erit æqualis angulus LMC, cum etiam istæ sint paralellæ, ergo angulus CML erit ęqualis angulo AGE, ergo erũt parallelæ CD, AB, quod erat demonstrandum.

PRO-

PROBLEMA X.

PROPOSITIO XXXI.

Dato puncto data recta linea ducere lineam alteri parallelam.

EX puncto M, ducenda sit linea paralleia AB, ducatur ex M vtcunque ad lineam AB linea ME, & ducatur linea per punctum M, quæ cum linea ME, ducta faciat angulum CME æqualem angulo B G M. dico hanc esse parallelam, cum anguli alterni sint ex constructione æquales, quod erat faciendum.

THEOREMA XXII.

PROPOSITIO XXXII.

Cuiuscunque trianguli vno latere producto externus angulus duobus internis, & oppositis æqualis est, & tres anguli simul sumpti interni æquales sunt duobus rectis.

IN triangulo ABC producatur latus BC in D, dico angulum ACD ęqualem esse duobus internis,& oppositis A,& B ducatur enim ex C linea C E, quæ sit parallela ipsi A B; quoniam igitur linea AC incidit in parallelas AB, EC erunt anguli alterni A, & ACE æquales, & quia recta B D pariter incidit in easdem parallelas A B, C E faciet angulũ externum D C E æqua-

æqualem interno ad easdem partes B. ergo totus angulus ACD est æqualis duobus internis A, & B; cum autem duo anguli ACB, & ACD sint æquales duobus rectis; erunt etiam angulus ACB, cum angulis A, & B, ęquales duobus rectis; cum isti æquiualeant externo, quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXIII.

PROPOSITIO XXXIII.

Rectæ lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, ad easdem partes coniungunt, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

Sint duæ rectæ lineæ AC, BD æquales; & parallelæ, quę coniungãtur duabus lineis AB; CD, dico istas etiam esse ęqua-

les, & parallelas. ducatur enim linea AD, quæ, cum incidat in parallelas AC, DB faciet angulos alternos CAD, ADB æquales: duo igitur triangula CAD, ADB habent conditiones quartæ, cum latus A C sit æquale lateri BD, & latus AD sit commune, & anguli comprehensi æqualibus lateribus sint æquales. iam basis CD erit ęqualis basi A B, & angulus BAD erit ęqualis angulo ADC. cum igitur isti anguli alterni sint æquales, ergo linea A B erit parallela C D, quod erat demonstrandum.

THEO.

THEOREMA XXIV.

PROPOSITIO XXXIV.

Parallelogrammorum spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso, & latera, & anguli; atque illa bifariam secat diameter.

IN parallelogrammo ABDC dico latera opposita esse æqualia, & angulos oppositos æquales; & diuidi bifariam ducta diametro. hæc tria simul probantur ducta, vtlibet diametro BC. triangula enim ACB, DCB, quæ resultant; habent conditiones 26. latus enim BC est commune; angulus BCA est æqualis angulo alterno CBD. cum incidat in parallelas linea BC; angulus BCD est

eſt æqualis angulo alterno CB D. cum incidat in parallelas linea BC; angulus BCD eſt æqualis angulo CBA. ergo triãgula illa ſunt inter ſe æqualia, & quoad latera, & quoad angulos: ergo latera oppoſita in parallelogrammo sũt ęqualia, & anguli oppoſiti A, & D. ſic probantur etiam B & C. quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XXV.

PROPOSITIO XXXV.

Parallelogramma ſuper eandem baſi, & in ijſdem parallelis conſtituta inter ſe sũt æqualia.

Sint intra duas parallelas AB.CD, conſtituta duo parallelogramma ACDE, EDCF, ſuper eandem baſim CD. dico eſſe

esse inter se æqualia. Considerentur enim duo triangula ACE, EDF, quæ habent conditiones 4.: latus enim AC est æquale lateri ED. Cum sint latera opposita in parallelogrammo, & latus EF lateri CD ob eandem rationem. Angulus AEC, angulo EFD interno, & opposito, cum linea AF incidat in CE, & DF parallelas. Ergo totum triangulum toti triangulo. Ergo addito triangulo communi CED, erit ACDE parallelogrammum ęquale parallelogrammo EDCF, quæ sūt super eandem basim CD, quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XXVI.

PROPOSITIO XXXVI.

Parallelogramma super æqualibus basibus; & in ijsdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.

Sint duo parallelogramma ACEF, & DHGB super æqualibus basibus CE, HD, & in ijsdem parallelis constituta. dico inter se esse æqualia ducantur enim nectentes lineæ E B, CG constituent parallelogramma, cum nectant paralleias, & æquales CE, BG lineæ ductæ. cum igitur hoc medium parallelogramma CE BG sit æquale ipsi AC EF, quia est super eamdem basim CE in ijsdem parallelis, & sit etiam æquale ipsi

GH

GHDB, quia est super eamdem basim B G, cum illo in ijsdem parallelis; ergo illa duo erunt æqualia vni tertio, & inter se, quod erat demonstrandum.

PROBLEMA XXVII.

PROPOSITIO XXXVII.

Triangula super eadem basi constituta, & in ijsdem parallelis inter se sunt æqualia.

SInt inter parallelas ABCD super basim CD constituta duo triangula ACD, & CDB, hoc est linea ducta per apices A, & B sit parallela basi, dico esse æqualia, ducatur enim ex D linea DE parallela ipsi AC. & D F parallela C B, erunt duo parallelogramma A C D E, & CDFB inter se æqualia cum sint

ſint ſuper eamdem baſim CD: ſed horum dimidia ſunt dicta triangula cum ſecentur bifariā à diametro, ergo erunt inter ſe æqualia, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XXVIII

PROPOSITIO XXXVIII.

Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in iiſdem parallelis inter ſe ſunt æqualia

Sint duo triāgula ACE, BFD ſuper baſibus æqualibus CE, FD in iiſdem parallelis. dico eſſe inter ſe æqualia. ducatur enim EG parallela ipſi AC, & DH ipſi BF erunt parallelogramma FDHB, ACEG æqualia, cum igitur horum dimidia ſint triangula dicta, erunt & inter

inter se æqualia. quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXIX

PROPOSITIO XXXIX.

Si duo triangula sint super eamdem basim, & constituta ad easdem partes, & sint inter se æqualia, erunt in ijsdem parallelis.

SI enim sunt inter se æqualia triangula ABC, & CBD super eadem basi CB, & ad easdem partes ducatur alia linea parallela ipsi BC, & sit AF, vel AE, si nõ est AD, vel EC iũgatur FC. erunt igitur duo triangula ABC, & CEB, æqualia, sed eidẽ triangulo ABC est æquale triãgulum B D C ex suppositione; ergo duo triãgula BCD, & BCE

erunt

erunt inter se æqualia totum scilicet: & pars ergo prima A D erat parallela basi, & non secuoda AF, vel AE, qua posi-tata sequeretur idem absusdũ, quare si duo triangula & cęt. quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXX.

PROPOSITIO XL.

Triangula, quæ sunt constituta ad easdem partes super æqualibus basibus si sint inter se æqualia erunt in ijsdem parallelis.

SI enim duo triangula A B C, DEF sint constituta ad easdem partes super æqualibus basibus BC,EF, & sint inter se æqualia non tamen dicatur linea AD parallela ipsi B

F

F ducatur alia, quæ sit parallela huic, & sit AG, vel AH ducatur GF, cum igitur duo triãgula ABC, FGE dicantur in ijsdem parallelis super æqualibus basibus erunt ęqualia; sed eidem A B C est æquale FDE. ergo & duo triangula FDE: E GF erũt inter se æqualia, pars, & totum: idem sequitur posita AH pro parallela eidem BF, & ducta HF non igitur AG, vel AH, sed AD est parallela ipsi B F. quod erat demonstrandum.

THEO

THEOREMA XXXI.

PROPOSITIO XLI.

Si parallelogrammum habuerit eamdem basim, cum triangulo, & fuerit in iisdem parallelis parallelogrammum erit duplum ipsius trianguli.

CONstituatur inter easdem parallelas AB, DC super eamdem basim DC parallelogrammum EDCA, & triangulũ CDB dico parallelogrammum triangulo esse duplum ducta enim diametro AD erunt triãgula ACD, EAD æqualia; at parallelogrammum duplum est triangulo ADC, ergo, & duplũ triangulo CDB, eidem ACD æquali quod erat demonstrãdum.

PRO-

PROBLEMA XI.

PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

SIt datum triangulum ABC, & angulus rectilineus D, diuidatur vnum latus triãguli BC bifariam in D, & fiat angulus BDA æqualis angulo D ducatur item per A linea AG parallela ipsi BC, quã secet DF in F, & ducatur recta CG eritque parallelogrammũ GFDC cum angulo FDC æquali dato angulo rectilineo D. quod autem sit æquale triãgulo patet; nam est duplum trianguli CDA super eadem basi in ijsdem parallelis; sed triã-

gulum

gulum ACD eſt dimidiũ trianguli BAC, cum duo triangula BAC, BAD ſint æqualia, ſuper æqualibus baſibus conſtituta, erit & parallelogrammum æquale triangulo in dato angulo rectilineo, quia angulus AD B, qui eſt æqualis angulo *D*, eſt ęqualis etiã angulo FDC quare tam AD, quam FD ſupra BC faciunt angulos æquales duobus rectis ablato igitur communi angulo ADF, remanebũt ADB, & FDC æquales inter ſe. quod erat demonſtrandũ.

THEO-

THEOREMA XXXII.

PROPOSITIO XLIII.

In omni parallelogrammo complementa, quæ sunt circa diametrum inter se sunt æqualia.

IN Parallelogrammo ABDC complementa CG, BG dicuntur esse æqualia. Cum enim triangula ACD, & ADB sint æqualia: similiter triangula IDG, & GDF: nec non AGE,& AGH,si ex ADB auferantur hæc duo AGE, & IGD & ex ADC, ADH, & GFD auferrentur partes æquales remanebunt igitur EI,& HF.cõplementa æqualia. Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA XII.

PROPOSITIO XLIV.

Ad datam rectam lineam applicare in dato angulo rectilineo parallelogrammum dato triãgulo æquale.

SIt data recta linea A, supra quam sit construendum parallelogrammum æquale triangulo B, quod habeat angulum C, construatur parallelogrammum GB æquale triãgulo B, quod habeat angulum IGE æqualem angulo C, dato producaturq; IG ad H, vt GH sit æqualis ipsi A, ducaturque H A parallela ipsi EG donec occurrat lineæ BE productæ in A. demittaturq; BI, donec occurrat lineæ productæ per AG,

AG,in D ducatur DC parallela GH,productis AH in C.& E G in F dico parallelogrammũ FH esse imperatum, est enim super latus GH æquale ipsi A; angulus FGH est æqualis angulo EGI,hoc est angulo C. & est equale complemento GB, hoc est triangulo B.quod erat faciendum.

PROBLEMA XIII.

PROPOSITIO XLV.

Super datam rectam lineam, dato rectilinæo æquale parallelogrammum constituere,in dato angulo rectilineo.

SIt datum rectilineum AB C cui constituendum sit parallegrammum æquale, cuius vnum latus sit data recta

EF,& datus sit angulus D. diuidatur datum rectilineum in quotlibet triangula ABC, tum cōstituatur parallelogrammū FH,cuius sit vnum latus EF,& angulus EFG,sit ęqualis angulo D, & sit parallelogrammum duplum triangulo A, tum super lineam GH , & angulo IH G, fiat parallelogrammum GI duplum triangulo B,ita & KM supra IK duplum triangulo C. Cum igitur totum Parallelogrammum MF sit duplum rectilineo dato; dico FH eius dimidium eidem rectilineo esse ęquale ad datam rectam lineā in dato Angulo rectilineo ; quod erat faciendum .

PRO-

PROBLEMA XIV.

PROPOSITIO XLVI.

Data recta linea quadratum describere.

SIt data recta A B super quam oporteat quadratũ describere. super AB, erigantur perpendiculares AD , BC, quę sumantur æquales ipsi A B, & connectantur recta DC, dico ABCD esse quadratum. cum enim anguli A , & B sint recti erunt AD,BC parallelæ , & sunt æquales igitur, & AB, EC parallelæ sunt,& æquales; cum igitur quatuor lineæ sint ęquales , & anguli recti omnes,erit quadratum.quod erat faciendum .

THEOREMA XXXIII.

PROPOSITIO XLVII.

In triangulis rectangulis quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

IN triangulo ABC, angulus BAC sit rectus, si describātur quadrata super BC, & super AB, AC, dico quadratum descriptum à BC solum, esse æquale alijs duobus descriptis à BA, AC. ducatur enim recta AK parallela lateribus BE, CD quę secet BC, in L, & ex A ducatur AE, ducaturq; FC, quoniam igitur duo anguli BAC, BAG sunt recti, erunt GA, AC

vna

vna recta linea similiter vna recta BA, AI considerentur iã duo triangula FBC,ABE, quæ habent conditiones quartæ latus enim EB in triangulo AB E est æquale lateri BC in altero triangulo BCF, sunt enim latera eiusdem quadrati, & A B est æquale lateri BF, eadem ratione & angulus ABE est æquale angulo FBC. cum enim anguli FBA,CBE sint recti, & consequenter æquales, addito vtrique communi angulo AB C erit angulus ABE totus æqualis angulo FBC, ergo illa duo triangula sunt æqualia, sed triangulum FBC est dimidium quadrati EG,AB, cum sit super eamdem basim FB in iisdem parallelis FB,GC, ergo etiam triangulum ABE erit dimidium eiusdem quadrati, cũ sit illi æquale, sed est etiam

dimidium parallelogrammi B
K cum ſit ſuper eamdem baſim BE,& in ijſdem, parallelis ergo parallelogrammum BK eſt æquale quadrato FGAB eodem demonſtrabitur parallelogrammum KC æquale quadrato AIHC, ergo totum quadratum lineæ BC eſt ęquale duobus quadratis linearum BA,AC. quod erat demonſtrãdum.

THEO-

THEOREMA XXXIV

PROPOSITIO XLVIII.

Si quadratum, quod ab uno latere trianguli describitur, æquale sit eis quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus comprehensus illis lateribus erit rectus.

SIt quadratum lateris AC æquale quadratis laterum AB, BC. dico angulum ABC esse rectum. ducatur namque BD perpendicularis ipsi BA æqualis rectæ BC connectaturque recta AD. quoniam igitur in triangulo ABD angulus ABD est rectus, erit quadratum AD æquale quadratis AB, BD, sed quadratum BD est æquale

quadrato B C, cum ex constructione sint latera æqualia DB, BC ergo quadratum AD est æquale quadratis AB, BC sed ijsdem est æquale quadratum AC, ergo quadrata AD, AC sunt æqualia, ergo & lineæ A C, AD. duo igitur triangula AB C, ABD erunt æqualia cum habeant tria latera æqualia igitur angulus ABC erit æqualis angulo ABD, & consequenter rectus etiam ipsæ cum ille sit rectus, quod erat demonstrandum.

EV-

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBER SECVNDVS.
DEFINITIONES.

1 Omne parallelogrammũ rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ comprehendunt vnum ex rectis angulis. *Dum enim vna supra aliam ad rectos angulos recta duci intelligitur formari intelligitur rectangulum, ut in lib. Fig. pag.* 20. *ABCD*

2 In omni parallelogrammo spatio, parallelogrammum illud, quod circa diametrum est, si diameter ducatur, vna

cum duobus complementis Gnomon vocatur, vt ibidem Gnomon est multilatera Figura ex tribus reliquis parallelogrammis, si excipiatur vnum in ijs per quæ diameter transit, vt ea per quam transit circũferentia HGM.

THEOREMA I.

PROPOSITIO I.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, seceturq; ipsarum altera in quotcunque partes rectangulum comprahensum sub illis duabus rectis lineis æquale est eis rectangulis, quæ sub non secta, & omnibus illis partibus comprehenduntur.

SInt duæ rectæ A, & BC, quarum BC secetur in D, &

& E, dico rectangulum comprehensum sub A, & BC tota æquale esse rectangulis, quæ fiunt ab eadem A, & BD, vna cum rectangulis, quæ fiunt ab A, & DE, & EC. fiat enim rectangulum BF, ex BG æquali ipsi A, & ex BC, deinde ex D erigatur parallela ipsi BG linea DH, & ex E altera eidem parallela EI, ostendo in toto isto rectangulo BF esse inclusa tria rectangula ex A, & ex illis tribus partibus, quæ fiunt ex secta BC, & consequenter esse æqualia: cum enim DH, sit parallela, & æqualis ipsi BG, erit BH rectangulum ex GB, hoc est A. & BD: similiter DI erit rectangulum ex DH, hoc est BG, seu A, quæ sunt inter se æquales, & DE; & cum EI sit parallela, & æqualis ipsi DH, & consequenter ipsi A, erunt rectan-

ctangula BH,DI,EF explent totum rectangulum BF,& cõsequenter illi æqualia, quod erat demonstrandum.

THEOREMA II.

PROPOSITIO II.

Si recta linea secta sit vtcunque rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur æqualia sunt quadrato, quod fit à tota.

Recta linea CA diuidatur vtcunque in E. dico rectangula, quę fiunt à tota CA, & à patribus CE, & EA esse æqualia quadrato, quod fit à tota CA, fiat enim quadratum totius CA, & sit CK deinde ex A erigatur AK parallela ipsi CF. ostendo illud quadratum adæ-

adequatè diuisum esse in duo rectangula facta ex AE, EI, & ex EC, CF, & consequenter esse illis duobus æquale. linea enim CF est parallela, & æqualis ipsi AK; hæc autem, cum sit latus quadrati erit æqualis ipsi CA, & consequenter etiam CF erit æqualis ipsi IE, cum autem angulus C sit rectus, erit etiam AEI rectus, erit igitur CK rectangulum sub CF, hoc est CA, & EC, similiter CI erit rectangulum sub CF, hoc est AC, & CE: cum igitur duæ istæ partes adęquent totum quadratum, erunt illi æquales, quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA III.

PROPOSITIO III.

Si recta linea secetur vtcunque rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum æquale est illi rectangulo, quod fit à segmentis, vna cum quadrato, quod fit ab illo segmento prius sumpto.

SIt recta linea AB diuisa vtcuuque in C dico rectangulum comprehensum sub tota AB,& vna parte AC, vt rectangulum AF æquale esse rectangulo, quod fit à partibus AC,CB,vna cum quadrato ipsius AC, fiat enim prędictum rectangulum AF ostendo in ipso includi adequatè, & rectagulum illarum partium, & qua-

quadratum ipsius AC, ex C enim erigatur CD parallela ipsi AE, AF erit rectangulum comprehensum sub partibus AC, CB, & AD erit quadratum ipsius AC, AE, enim supponitur equalis. ipsi AC in rectangulo AF, ergo, & FB, DC cum sint latera opposita in parallelogrammo AD. ergo AD est quadratum ipsius AC, & cum angulus A sit rectus etiam angulus BCD erit rectus. ergo cum CD sit æqualis ipsi AC, erit AF rectangulum ex CD, hoc est AC, & CB. quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA IV.

PROPOSITIO IV.

Si recta linea secta sit vtcunque quadratum, quod à tota describitur æquale est illis, quæ à segmentis describuntur quadratis, & ei, quod bis subsegmentis comprehenditur rectãgulo.

SIt recta AB diuisa vtcunque in C fiat quadratum totius AB ostendo istud quadratum diuidi adequatè in duo quadrata partium AC, CB, & in duo rectangula, quæ fiant vtraque ex AC, CB ducatur enim diameter EB, deinde ex C erigatur CF, parallela ipsi AE, & per punctum vbi seccatur diameter in G duca-

ducatur IH parallela ipsi *A*B, cum igitur IH sit parallela ipsi *A*B, si angulus *A* est rectus, & angulus *A*HG erit rectus, & similiter BCG, & linea CG erit æqualis ipsi *A*H, & cum CG sit parallela ipsi BI, quæ est parallela ipsi *A*H, erit & illi æqualis claudens CB, & GI æquales & cum triangula E*A*B, ED B habeant conditiones 4. latus enim E*A*, æquale est lateri DB, & *A*B, ipsi ED, & angulus *A* angulo D. erit & angulus *A* BE angulo DBE æqualis: ergo in triangulo paruo GCB cum sit angulus C rectus, vt est angulus I in triangulo GIB, & angulus CBG angulo IBG, & latus GB commune erit CG. GI, & CB, lateri BI æquale. eodem modo ostendetur latus H G, GF æquale cum triangula EHG, EFG sint æqualia, & HE, EF.

EF. erit igitur HF quadratum ipsius AC,& CI quadratum ipsius CB,cum latera omnia sint æqualia,& anguli recti.eodem modo constat AG esse rectangulum sub AC,CG. hoc est C B, & GD alterum rectangulũ sub GF,quæ est æqualis ipsi H G,hoc est ipsi AC, & GI,seu C B,igitur intra quadratum AD sunt adæquatè duo quadrata partium AC,CB,& duo rectãgula earumdum partiũ , quod erat demonstrandum .

Constat ex hoc Theoremate rectangula, quæ sunt circa diametrum in quadrato esse quadrata .

THEO-

THEOREMA V.

PROPOSITIO V.

Si recta linea secetur in partes æquales, & non æquales, rectãgulum, quod fit ab inæqualibus segmentis, vna cum quadrato inter media sectionis æquale est quadrato, quod fit à dimidia.

Diuidatur recta AB bifariam in C, & non bifariam in D. dico rectangulum factum ex segmentis inæqualibus AD, DB, vna cum quadrato intermediæ CD, quæ est inter sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ CA, fiat enim quadratum CF ex dimidia CA, & ducta diametro EA, ex D erigatur DG parallela ipsi AF, & per punctum sectionis H, ducatur

IK

IK parallela ipsi AB ostēdo rectangulum BK, quod remanet extra quadratum CF, æquale esse rectangulo DF, quo ostenso patebit quadratum C F, æquale esse rectangulo I A, vna cum quadrato KG. probo autem, nam linea AF est æqualis ipsi AC, quia sunt latera quadrati, & BC est æqualis eidem CA cum tota sit diuisa bifariam in C: ergo BC est æqualis ipsi AF, DA est æqualis ipsi AI, cum D I sit quadratum ex supradictis, ergo est etiam æqualis ipsi B I. ergo rectangulum DF est æquale IC. quod erat demonstrandum; cum sub æqualibus lineis contineatur.

THEO-

THEOREMA VI.

PROPOSITIO VI.

Si recta linea secetur bifariam, & illi adijciatur alia recta linea, rectangulum comprehensum sub composita ex tota, & adiuncta, vna cum quadrato dimidiæ æquale est quadrato, quod fit ex linea composita ex dimidia, & adiecta.

Recta A D secetur bifariam in C illique alia addatur BD. dico rectangulum factum ex tota AB, quæ componitur ex tota, & adiecta, & ex B D adiecta, vna cum quadrato ipsius CD, æquale esse quadrato, quod fit à CB, quæ constat ex dimidia, & adiecta. describatur enim quadratum CF, ex

CB

CB, & ducta diametro EB, erigatur paralella DG ex puncto D per punctum inter sectionis H ducatur IL paralella ipsi BA. ostendo rectangulum HF æquale esse rectangulo LC quod vbi ostendero habebo intentũ: reliqua enim continentur intra quadratum, vt apparet; CB verò cum sit æqualis ipsi BF, & DB, ipsi BI, cum sint latera quadratorum; si hæc auferantur à primis, remanebit FI æqualis ipsi DC, hæc autem æqualis est ipsi CA, cum sit diuisa bifariam. BI est æqualis ipsi AL, cum sint latera opposita rectanguli, huic autem est etiã æqualis DB, seu GF, quæ illi opponitur.. ergo rectangulum CL est æquale rectangulo HF, quod est demonstrandum, nam quadratum EH constat esse quadratum ipsius CD.

THEO-

THEOREMA VII.

PROPOSITIO VII.

Si recta linea secetur vtcunque dico quadrata, quæ fiunt alterũ à tota, alterum ab vno segmẽtorum æqualia esse simul sumpta rectangulo, quod fit à tota, & dicto segmento bis sumpto, & addito quadrato alterius segmentia.

SEcetur recta BA vtcunque in C, dico quadratum totius B A vna cũ quadrato segmenti B C æquale esse rectangulo facto à tota B A, & à segmento BC; si bis sumatur, & illi addatur quadratum alterius segmenti CA, describatur enim quadratum ex tota BA ex C, erigatur paralella ipsi BD, linea

E CF,

CF, & sumpta BH æquali ipsi B C, ducatur H I parallela ipsi B A, & ad faciliorem demonstrationem producta CF, vsque ad L. vt sit æqualis segmento BC. producatur etiam D ad K & fiat quadratum FK. ostendo quadratum A E vna cum quadrato FK, quod est quadratum ipsius CB, vt constat ex constructione continere duo rectangula ex A B, C B, & quadratum I F, quod constat esse quadratum ipsius A C. patet autem hoc, cum enim C B sit æqualis ipsi B H ex constructione BI erit rectangulum ex AB, BC. similiter cum BE, sit æqualis ipsi AB, BF erit rectangulum ex BA, BC, quia autem bis sumitur quadratum CH, sumatur secunda vice quadratũ FK illi æquale, & erunt completa duo rectangula igitur in

qua-

quadrato AD vna cum quadrato FK sunt illa duo rectangula vna cum quadrato ipsius AC, quod est quadratum EG, vt constat, quod erat demonstrandum.

THEOREMA VIII.
PROPOSITIO VIII.

Si recta linea secetur vtcunque; rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit quadrato æquale est ei quod à tota, et dicto segmento tanquam ab vna linea, describitur quadrato.

SIt recta AB diuisa vtcunq; in C dico, si sumantur quatuor rectangula facta ex AB, CB, vna cum quadrato ipsius AC, æqualia esse ista omnia

quadrato, quod fit ex tota AB, BC, tanquam ex vna linea. Addatur enim BD æqualis ipsi CB, & describatur quadratum AE, tunc per punctum B, & C ducantur recte BG, CI parallelæ ipsi DE, & sumptis DM, & MP, quæ sint æquales ipsi CB, ducãtur aliæ parallelæ ML, PO ostendo in toto quadrato A E esse quatuor rectangula dicta, vna cum illo quadrato, ex quo sequetur illa rectangula cum quadrato dicto esse æqualia quadrato AE. nam IO est quadratum ipsius C A, vt constat ex supradictis LB, & HA, sunt duo rectangula ex AB CB, cum MD, & PM sint sumpta ęquales ipsi BC. similiter HE est rectãgulum tertium ex AB, BC; nam MF est æqualis ipsi AB, cum AD, DE sint litera quadrati, ac proinde æqualia, demptis ergo

ergo BD, DM, æqualibus remanebit AB, ME æqualis; & CE ipsi DB, seu CB est æqualis quartũ esset rectangulum HI, sed illis deest quadratum KH sumptũ iam in rectangulo OH, loco igitur illius ponatur quadratum HD illi æquale cum habeat latera æqualia, ergo in toto quadrato AE continentur quatuor dicta rectangula vna cum dicto quadrato, quod erat demonstrandum.

THEOREMA IX.

PROPOSITIO IX.

Si recta linea secetur in partes æquales, & non æquales; quadrata, quæ fiunt à partibus inæqualibus sunt duplicia quadratorum, quæ fiunt à dimidia, & ab interiecta inter dimidiam, & alteram sectionem.

SEcetur recta AB bifariam in C, & non bifariam in D. dico quadrata rectarum A D, D B simul, esse dupla quadratorum AC, CD. educatur enim ex C ad A B perpendicularis C E, quæ sit æqualis ipsi AC, iunganturque rectæ EA, EB, deinde ex D erigatur recta perpendicularis vsque ad F, & per F ducatur F G parallela ipsi

ipsi A B, & denique ducatur recta AF. quoniam igitur in triangulo ACE, AC, CE sunt latera æqualia, erũt anguli CAE, CEA æquales cum autem angulus ad C sit rectus isti, qui continent alterum rectum, erunt semirecti. eodem modo demonstrabitur angulus CEB, & CBE semirectus; ex quo etiã inferetur, quod anguli DFB, & GFE sint semirecti; cum & angulus BDF, & FGE sint recti ex constructione; ergo totus etiam angulus A E F constans ex duobus semirectis, erit rectus. cum igitur in triangulo ACE angulus C sit rectus, quadratum AE erit æquale quadratis AC, CE, quæ cum sint æqualia erit AE duplum quadrati AC. eodem modo cum in triangulo E G F angulus G sit rectus, erit quadratum FE æ-

quale quadratis FG, GE, & cõsequenter duplum quadrati FG, cum illa latera sint æqualia, & duplum quadrati CD, cũ CD sit æqualis ipsi GF; ergo quadrata AE, EF erunt dupla quadratorum AC, CD, cum vero in triangulo AEF angulus ad E sit rectus, quadratum AF erit æquale quadratis AE, EF, & consequenter duplum quadratorum AC, CD, cum autem in triangulo AFD, angulus ad D sit rectus; erunt quadrata AD, DF, seu DB, cum illa duo sint latera æqualia, eo quod anguli sint æquales. æqualia quadrato AF, & consequenter dupla quadratorum AC, CD. quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA X.

PROPOSITIO X.

Si recta linea secetur bifariam, & illi addatur quæuis recta linea; quadrata, quæ fiunt à tota cum adiuncta, & ab adiuncta sola, sunt duplicia quadratorum, quæ fiunt à dimidia, & à composita ex dimidia, & adiuncta.

SEcetur recta A B bifariam in C, & ei addatur quælibet BD. dico quadrata rectarũ AD,DB duplicia esse quadratorum AC,CD. erigatur enim ex C perpendicularis CE, æqualis dimidiè AC; iunganturq; rectæ AE,EB, ducaturq; per D recta GF parallela ipsi CE, & ducatur EF ad angulos rectos cum CE, & producatur EB, vt per-

tingat ad G ; ac demum ducatur A G. Cum igitur angulus ACE sit rectus ; anguli etiam AEC, CEA ostendentur semirecti, cum latera CA, CE sint æqualia, ergo & anguli ad latera æquales, vt etiam CB, CE, & anguli ad C sint recti ; eodem modo angulus DBG ostendetur semirectus cum sit ad verticem, cum CBE, & consequẽter DGB erit semirectus cum angulus ad D in triãgulo BDG sit rectus, cum autem in triangulo EFG, angulus F sit rectus angulus ad C semirectus ad E erit semirectus ; & consequenter latera EF, FG erunt æqualia, quoniam igitur quadratum AE est æquale quadratis A C, CE erit duplum quadrati AC ; quia illa sunt æqualia. Cum verò CF sit parallelogrammũ, erit EF æqualis ipsi CD. igitur

cum

cum in triangulo E F G, quadratum EG ſit æquale quadratis EF,FG erit duplum quadrati EF, ſeu quadrati CD. igitur quadrata AE, EG ſunt dupla quadratorum AC,CD. cum autem in triangulo A E G, quadratum AG ſit æquale quadratis AE,EG, erit iſtud ſolum duplum quadratorum AC,CD, & cum triangulum ADG ſit rectangulum, erunt quadrata AD, DG, ſeu DB, quæ ſunt lineæ æquales, æqualia quadrato AG; & conſequenter ipſa etiam dupla quadratorum AC, CD. quod erat demonſtrandū.

PROBLEMA I.

PROPOSITIO XI.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum comprahensum sub tota, & altero segmentorũ æquale sit quadrato, quod fit à reliquo segmento.

SIt diuidenda recta AB; ita vt rectangulum comprehensum sub tota AB, & altero segmento BG æquale sit quadrato, quod fit ab altero segmento AG. describatur ex AB quadratum AC: diuisoque latere AD bifariam in E, erigatur E ad B; cui sumatur æqualis EF producta DA vsque in F. Sumaturque GA æqualis ipsi AF, fiatque quadratum AH ex AG. dico rectam AB, sectam esse

esse in G. ita vt rectangulum sub AB,BG sit æquale quadrato AG. ducatur enim GH vsq; ad I erit rectangulum GC cōprehensum sub AB,BG, cum BG sit æqualis ipsi AB,eo quod sint latera eiusdem quadrati,& AH erit quadratum ipsius GA. probo igitur rectangulum GC esse æquale quadrato AH. quoniam igitur recta AD diuisa est bifariam in E, & addita alia AF erit rectangulum sub DF, FA, hoc est rectangulum DH, vna cum quadrato dimidiè E A æquale quadrato rectè EF. est autem quadratum rectè E B æquale quadrato E F, cum sumptæ sunt illæ lineæ æquales; ergo rectangulum sub DF, FA, vna cum quadrato AE est æquale quadrato EB, in triangulo autem rectangulo EAB, quadrata EA, AB æqualia sunt qua-

quadrato EB. igitur quadrata FA, AB æqualia sunt rectangulo DH, vna cum quadrato EA ablato igitur communi quadrato FA, remanebit rectangulũ DH æquale quadrato AB, hoc est quadrato AC, dempta communi parte GD remanebit rectangulum IB æquale quadrato AH, quod erat demonstrandum.

THEO.

THEOREMA XI.

PROPOSITIO XII.

In amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit à latere obtusum angulum subtendente maius est quadratis, quæ fiunt ab alijs lateribus, duplici rectangulo, quod fiat ab vno latere obtusum angulum formante, quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab absumpta exterius linea inter perpendicularem, & obtusum angulum.

SIt triangulum ABC habens angulum ABC obtusum. producatur latus C B, donec demissa perpendicularis ex A, cadat super ipsum in D. dico quadratum lateris A C, quod op-

opponitur angulo obtuso B, esse maius, quam sint quadrata AB, CB duplici rectangulo comprehenso sub CB,CD.cum enim recta CD sit vtcunque diuisa in B, erit quadratum rectę CD ęquale duobus quadratis rectarum BC,DB, & rectangulo bis comprehenso sub BC, BD, addito igitur cõmuni quadrato AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA æqualia quinque figuris; quadratis DB,BC,DA, & duobus rectangulis ex CB, BD, & quia triangulum ACD est rectangulum, erit quadratum A C solum æquale quadratis AD, DC, ergo erit æquale quinque dictis figuris quadratis, scilicet tribus DB,BC,DA, & duobus rectangulis ex BC,BD; cum autem & triangulum ABD sit rectangulum,erit quadratum AB ęquale

le quadratis AD, DB. cum igitur dictum sit quadratum AC æquale quinque figuris duobus rectangulis, scilicet sub CB, BD, & tribus quadratis CB BD, DA, loco horum duorum summatur BA; erit igitur quadratum AC æquale duobus quadratis CB, BA, & duobus rectangulis sub CB, BD. ergo quadratum ipsius AC excedit illa duo quadrata ijs duobus rectangulis, quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XII.

PROPOSITIO XIII.

In oxygonijs triangulis quadratum à latere acutum angulum subtendente minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus eundem comprahendentibus, duplici rectangulo comprahenso ab vno latere, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea inter perpendicularem, & acutum angulum.

SIt triangulum ABC habens omnes angulos acutos, & ab A demissa perpendicularis AD, cadat in latus BC. dico quadratum lateris AB minus esse quadratis laterum AC,CB duplici rectãgulo facto ex CB, DC,

DC, hoc eſt quadratum lateris AB, vna cum illis rectangulis ęquale eſſe quadratis AC, CB. cum enim recta BC diuiſa ſit vtcunque in *D*, erunt quadrata rectarum BC, CD æqualia duplici rectāgulo ſub BC, CD, & quadrato rectę BD. addito ergo communi quadrato rectę DA, erunt tria quadrata BC, CD, DA ęqualia quatuor figuris duobus rectangulis BC,CD, & duobus quadratis BD, DA, loco autem duorum quadratorum CD, DA ſumatur vnicū quadratum CA, erunt igitur duo quadrata BC, CA ęqualia quatuor figuris, duobus ſcilicet rectangulis BC,CD, & BD, DA loco horum duorum quadratorum DB, DA ſumatur vnicū quadratum BA illi æquale, erunt igitur duo quadrata BC, CA æqualia tribus figuris quadrato

drato ſcilicet BA, & duobus rectangulis ex BC, CD. quod erat demonſtrandum.

PROBLEMA II.

PROPOSITIO XIV.

Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.

SIt datum rectilineum A, cui quadratum æquale conſtituendum eſt, conſtituatur rectangulum, hoc eſt parallelogrammum in angulo recto, æquale dato rectilineo A. & producatur latus DC vſque in F; ita vt latus CF ſit æquale lateri CB: deinde tota FD diuidatur bifariam in G, & facto centro in G deſcribatur ſemicirculus DHF, tum BC producatur vſque ad peripheriã H. dico

dico quadratū CH eſſe ęquale rectilineo A dato. iungatur recta GH, quoniam recta DF diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C, erit rectangulū ſub DC, CF, hoc eſt rectangulum DB, ſeu rectilineum A, quod eſt illi æquale, vna cum quadrato rectę GC æquale quadrato rectę GF, ſeu GH, quæ ſunt æquales; ſed quadratum GH eſt æquale quadratis GC, CH. igitur rectangulum DB, ſeu rectilineum A, vna cum quadrato rectę GC eſt ęquale quadratis rectarum GC, CH, ablato igitur cōmuni quadrato GC, remanebit rectangulum DB, ſeu rectilineū A æquale quadrato rectæ CH, quod erat demonſtrandum.

EV-

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBER TERTIVS.

DEFINITIONES.

1. AEquales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales,
2. Recta linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producatur, circulum non secat.
3. Circuli se se mutuo tangere dicuntur, qui se se mutuo tangentes, se se mutuo non secant,
4. In circulo æqualiter distare

à cen-

à centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducũtur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

5. Segmentum circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria compræhenditur,

6. Segmenti autem angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprę hẽditur.

7. In segmento autem angulus est, cum in segmenti peripheria sumptũ fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ segmenti basis est, adiũctæ fuerint rectæ lineæ: Is, inquam, angulus ab adiunctis illis lineis compræhensus.

8. Cum

8. Cum vero comprehendentes angulum rectæ lineę aliquam assumunt peripheriã, illi angulus insistere dicitur.

9. Sector autem circuli est, cũ ad ipsius circuli cêntrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimium figura, & à rectis lineis angulum continentibus, & á peripheria ab illis assumpta.

10. Similia circuli segmenta sunt, quæ angulos cupiunt æquales, aut in quibus anguli inter se sunt æquales exempla harum omniũ vide in libello figurarũ pag. huic correspondenti.

PRO-

PROBLEMA I.

PROPOSITIO I.

Dati circuli centrum reperire.

SIt circulus datus ABCD, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque AC, quæ bifarlam diuidatur in F, & per F ad AC, perpendicularis agatur BD, vtrinque in peripheria terminata in punctis BG. Hac igitur bifariam secta in F, dico F esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta BD, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctũ ipsam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuisa fuit equaliter. Si igitur F non est centrum, sit punctum E, extra

rectam B D, centrum, à quo ducantur lineæ EA, EC, ED. Quoniam ergo latera AE, ED, trianguli A E D, æqualia sunt lateribus CE, ED, triãguli CED; & basis AD, basi CD; (à centro enim duci dicuntur) erunt anguli ADE, CDE æquales, ideoque recti: Erat autem & angulus ADF rectus ex cõstructione. Igitur recti ADF, ADE, æquales sunt, pars & totum, quod est absurdum. Non est ergo punctum E, centrum, eademque est ratio de omni alio, quare F centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus, quod erat faciendum.

THEO.

THEOREMA I.

PROPOSITIO II.

Si in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

HOc theorema demõstrari poterit affirmatiuè, hoc modo: Recta A B, coniungat duo puncta A, & B, in circunferentia circuli AB, cuius centrum C. Dico rectam AB, intra circulum cadere, ita vt omnia eius puncta media intra circulum existant. Assumatur enim quodcunque eius punctum intermedium D, & ex centro educantur rectę CA, CB, CD. Quoniam igitur duo latera

 CA,

CA,CB, trianguli CAB æqualia sunt, erunt anguli CAB, CBA equales: Est autem angulus CDA, angulo CBD, maior, externus interno. Igitur idem angulus CDA, angulo CAD maior erit, & ob id latus CA latere CD maius erit. Quare cum CA sit ducta à centro ad circunferentiam, vsque, non perueniet recta C D ad circunferentiam, ideoque punctum D intra circulum cadet. Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto, tota igitur recta AB intra circulum cadit. Quod est propositum.

THEO-

THEOREMA II.

PROPOSITIO III.

Si in circulo recta quaedam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos ipsam secabit. Et bifariam quoque eam secabit.

PEr centrum E, circuli BCD, recta BA, extensa diuidat rectam DC, non per centrum extensam, bifariam in F. dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi DC; ductis enim rectis ED, EC, erunt duo latera ED, EF, trianguli EDF, duobus EF, EC, trianguli ECF ęqualia; & bases DF, FC ęquales. Igitur

CA,CB, trianguli CAB æqualia sunt, erunt anguli CAB, CBA ęquales: Est autem angulus CDA, angulo CBD, maior, externus interno. Igitur idem angulus CDA, angulo CAD maior erit, & ob id latus CA latere CD maius erit. Quare cum CA sit ducta à centro ad circunferentiam, vsque, non perueniet recta C D ad circunferentiam, ideoque punctum D intra circulum cadet. Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto, tota igitur recta AB intra circulum cadit. Quod est propositum.

THEO-

THEOREMA II.

PROPOSITIO III.

Si in circulo recta quadam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos ipsam secabit. Et bifariam quoque eam secabit.

PEr centrum E, circuli BCD, recta BA, extensa diuidat rectam DC, non per centrum extensam, bifariam in F. dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi DC; ductis enim rectis ED, EC, erunt duo latera ED, EF, trianguli EDF, duobus EF, EC, trianguli ECF ęqualia; & bases DF, FC ęquales. Igitur

CA,CB, trianguli CAB æqualia sunt, erunt anguli CAB, CBA ęquales: Est autem angulus CDA, angulo CBD, maior, externus interno. Igitur idem angulus CDA, angulo CAD maior erit, & ob id latus CA latere CD maius erit. Quare cum CA sit ducta à centro ad circunferentiam, vsque, non perueniet recta C D ad circunferentiam, ideoque punctum D intra circulum cadet. Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto, tota igitur recta AB intra circulum cadit. Quod est propositum.

THEO-

THEOREMA II.

PROPOSITIO III.

Si in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos ipsam secabit. Et bifariam quoque eam secabit.

PER centrum E. circuli BCD, recta BA, extensa diuidat rectam DC, non per centrum extensam, bifariam in F. dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi DC; ductis enim rectis ED, EC, erunt duo latera ED,EF, trianguli EDF, duobus EF,EC, trianguli ECF æqualia; & bases DF,FC æquales. Igitur

anguli EFD, EFC ęquales erũt; hoc eſt, recti. Quod erat primo propoſitum.

Sit iam AF ad angulos rectos ipſi DC; dico rectam CD bifariam ſecari in F, à recta EB. ductis enim iterum rectis ED, EC: cum latera ED, EC, trianguli EDC ſint ęqualia, erunt anguli E D C, E C D ęquales. Quoniã igitur duo anguli EFD, E D F, trianguli E F D ęquales ſunt duobus angulis EFC, ECF, triãguli ECF, & latera EC, ED. quę rectis angulis æqualibus opponuntur, ęqualia quoque: erunt latera CF, FD æqualia, Quod ſecundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extenſa, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEO-

THEOREMA III.

PROPOSITIO IV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent non per centrum extensæ; se se mutuo bifariam non secabunt.

DVę rectę AB, CD, se mutuo in F; secent in circulo ACBD, non per centrum extensę. Dico fieri non posse, vt mutuo se se bifariam secent. Si enim vna earum per centrum transit, certum est, eam bifariã non secari: solum enim in centro, per quod altera ponitur non transire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquam bifariam ab altera diuidatur, tamen al-

anguli EFD, EFC ęquales erũt; hoc eſt, recti. Quod erat primo propoſitum.

Sit iam AF ad angulos rectos ipſi DC; dico rectam CD bifariam ſecari in F, à recta EB. ductis enim iterum rectis ED, EC: cum latera ED, EC, trianguli EDC ſint ęqualia, erunt anguli E D C, E C D ęquales. Quoniã igitur duo anguli EFD, E D F, trianguli E F D ęquales ſunt duobus angulis EFC, ECF, triãguli ECF, & latera EC, ED. quę rectis angulis æqualibus opponuntur, ęqualia quoque: erunt latera CF, FD æqualia, Quod ſecundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extenſa, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEO-

THEOREMA III.

PROPOSITIO IV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent non per centrum extensæ; se se mutuo bifariam non secabunt.

DVę rectę AB, CD, se mutuo in F; secent in circulo ACBD, non per centrum extensę. Dico fieri non posse, vt mutuo se se bifariam secent. Si enim vna earum per centrum transit, certum est, eam bifariã non secari: solum enim in centro, per quod altera ponitur non transire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquam bifariam ab altera diuidatur, tamen al-

tera minimè ſecabitur bifariã. Diuiſa enim ſit AB,& CD, ſi fieri poteſt, bifariam in F. Inuento igitur centro circuli E, ducatur ab eo ad F, recta FE; quoniam ergo F E ponitur ſecare rectam AB, bifariam in F, ſecabit ipſam ad angulos rectos. Eadem ratione ſecabitur C D ad angulos rectos, cum ponatur bifariam diuidi in F. Quare rectus angulus EFD, recto angulo EFA, ęqualis eſt, pars toti, quod eſt abſurdum. Itaque ſi in circulo duę rectę lineę ſeſe mutuo ſecent, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEO-

THEOREMA IV.

PROPOSITIO V.

Si duo circuli se se mutuo secent, non erit illorum idem centrum.

DVo circuli ABC, ADC, se mutuo secent in A, & C. Dico ipsos non habere idem centrum. Sit enim, si fieri potest, idem centrum vtriusque E, à quo duę rectę ducantur; EA, quidem ad sectionem A, EB, verò secans vtramque circumferentiam in D, & B. Quoniam igitur E, centrum ponitur circuli CDA, erit recta EA, rectę ED ęqualis. Rursus quia E, centrum quoque ponitur circuli ABC, erit & recta EB, eidem rectę EA ęqualis. Quare

rectę EB, ED, ęquales inter se erunt, pars,& totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli se se mutuo secent, &c. Quod ostendendum erat.

THEOREMA V.

PROPOSITIO VI.

Si duo circuli se se mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.

DVo circuli AB,AD, se interius tangant in A. Dico eos non habere idem centrũ. Habeant enim, si fieri potest, idem centrum E,à quo duę rectę ducantur; EA, quidem ad tactum A, At EB secans vtrãque circumferentiam in D, & B. Quoniam igitur E, Ponitur centrum circuli AD, erit recta

AE,

AE, rectæ ED, ęqualis. Rursus quia E, ponitur centrum circuli AB, erit EB, eidem rectę EA, ęqualis. Quare rectæ ED, & EB inter se erunt equales, pars & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli se se mutuo interius tangant, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOREMA VI.

PROPOSITIO VII.

Si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoque pũcto in circulum quadam recta linea cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, qua per centrum ducitur, remotiore sẽper maior est: Dua autem solum recta linea aquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minima, vel maxima.

IN diametro AB, circuli AG EB, cuius centrum D, punctum assumatur quodcunque C. prẹter centrum, & ex C, cadant

dant in circulum quotcunque lineę GC,FC,CE. Dico omniũ, quę ex C, ad circumferentiam ducuntur,maximam esse CA,in qua est centrum,minimam vero reliquam CB, quę diametrũ perficit: Deinde rectam CG, quę rectę CA, per centrum ductę propinquior est, maiorẽ recta CF, quę ab eadem CA, plus distat,& eadem ratione CF,maiorem recta CE,atque ita de alijs lineis,si ducerentur, in infinitum. Denique ex C, ad vtrasque partes minimę lineę CB,vel maximę CA,duci posse tantummodo duas lineas inter se ęquales. Ducantur è centro D,ad G,F,& E, rectę lineę DG,DF, DE. Quoniam igitur duo latera GD,DC, trianguli GDC, maiora sunt latere GC.Sunt autem rectę GD,DC, ęquales rectis AD,DC,hoc est,

toti

toti rectę CA, erit & CA, maior quam CG. Eadem ratione maior erit recta CA, quam CF, & quam CE. Quare CA, maxima est omnium, quę ex C, in circulum cadunt.

Deinde quoniam in triangulo ECD, latus ED, minus est duobus lateribus DC, CE. Est autem DE, ipsi DB, ęqualis erit & DB, minor duabus rectis D C, CB. Dempta ergo communi recta CD remanebit adhuc C B, minor, quam CE. Eadem ratione minor erit CB, quam CF, & quam GC. Quare CB, minima est omnium, quę ex C, in circuli circumferentiam cadunt.

Rursus, quia duo latera CD, DG, trianguli CDG, ęqualia sunt duobus lateribus CD, DF, trianguli CDF; & angulus totus CDG, maior est angulo FDC,

FDC; erit basis GC, maior basse FC. Eadem ratione maior erit GC, quam CE; Item maior erit CF, quam CE. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est ea, quę remotior.

Fiat iam angulo BDE, ex altera parte æqualis angulus BD H, & ducantur recta CH. Quoniam igitur latera ED, DC, triã-guli EDC, æqualia sunt lateribus HD, DC, trianguli HDC, & anguli his lateribus contenti EDC, HDC, æquales; erunt rectæ CE, CH, ex vtraque parte ipsius lineæ minimæ CB. vel maximæ CA, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus possit esse ęqualis, constat. Nam si ex C, ducatur alia, quę cadat supra punctum H. erit ea, cum sit ei, quę per per centrum ducitur, propin-

quior,

quior, maior quam CH: si vero cadat infra H, erit ea, cum sit remotior ab eadem CA, per centrum ducta, minor quam CH, vt ostensum fuit: Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ CB, vel maximæ CA, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA VII.

PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vtlibet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrũ ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper maior est; In conuexam vero peripheriam cadentium rectarũ linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor

nor est. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad vtrasque partes, minimæ, vel maximæ.

EX puncto E, extra circulũ BCDA, cuius centrum F, lineæ secantes circulum ducãtur, quarum AE, per centrum transeat, aliæ vero EB, EC, ED, vtcunque. Dico omnium esse maximam AE, quæ per centrũ ducitur, propinquior illi EB, maiorem recta EC, quę remotior est ab eadem AE. Et eadem ratione EB, maiorem quam ED, è contrario autem, rectam EG omnium, quæ extra circulum sunt, minimam esse: Deinde rectam EH, quę vicinior est minimæ EG, minorem esse recta EI, remotiore; Et eadem ratione, ipsam EI, minorem quam

EK,

EK. Denique ex E. ad vtrasq; partes minimæ lineæ EG, vel maximę AE, duci posse tãtummodo duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro F, ad puncta C,D,B,G,H, I K rectæ FC,FD,FB,FK,FH,FI. Quoniam igitur duo latera EF, FB, trianguli EFB, maiora sunt recta EB; Sunt autem rectæ EF,FA, æquales rectis EF, FB, hoc est tota recta AE; erit & *A E*, maior, quam EB. Eadem ratione erit AE, maior, quam EC, & quam ED. Quare AE, est omnium, quæ ex E, in circulum cadunt, maxima.

Deinde, quoniam latera EF, FB, trianguli EFB, æqualia sunt lateribus EF,FC, trianguli EF C; Et angulus totus EFB, maior est angulo EFC; erit basis EB, basi EC, maior. Eadem ratione maior erit EB, quam ED:

Item

Item EC,maior,quam FD.Quare linea propinquor ei,quę per centrum ducitur, maior eſt linea remotiore.

Rurſus, quia in triangulo EF H,recta EF, minor eſt duabus EH,HF; ſi auferantur æquales FG,FH: remanebit adhuc EG, minor,quam EH.Simili ratione erit EG,minor,quam EI,& quã EK. Quare EG, omnium linearum extra circulum,quæ ex E, dicuntur,minima eſt.

Rurſus, cum intra triangulũ EIF,cadant duæ rectę EH,HF, ab extremitatibus lateris EF; erunt EH,HF,minores,quam EI, IF. Sublatis igitur æqualibus FI,FH, remanebit adhuc FH, minor,quam FI.Pari ratione erit EH,minor,quam EK: Item EI,minor,quam EK. Quare linea propinquior minimæ lineę EG,minor eſt, quam remotior eadem. Po-

Poſtremo fiat angulo EFH, angulus EFL, æqualis, & ducatur recta EL. Quoniam igitur latera EF, FH, trianguli EFH, ęqualia ſunt lateribus EF, FL, trianguli EFL; Sunt autẽ & anguli EFH, EFL, dictis lateribus contenti æquales; erunt rectæ EH, EL, ex vtraque parte minimæ EG, vel maximæ EA inter ſe æquales. Quod autem nulla alia his poſſit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex E, ducatur recta cadens vltra L, erit ipſa, cum ſit remotior à minima, maior quam EL Quod ſi cadat inter G, & L, erit ea, cum fit minimæ propinquior, minor quam EL, vt oſtenſum eſt. Duę igitur ſolum rectæ lineæ æquales; ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque

pun-

puncto ad circulũ deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA VIII.

PROPOSITIO IX.

Si in circulo acceptum fuerit pũctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales: acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

A Puncto assumpto *A*, in circulo BCD, cadant plures rectæ, quam duæ, AB, AC AD, inter se æquales. Dico A, pũctum esse centrum circuli. Cõnectantur enim puncta B, C, D rectis BC, CD; quibus diuisis bifa-

bifariam in E,& F,ducantur ex A,rectæ AE,AF. Quoniam igitur latera AE,EB,trianguli AEB, ęqualia sunt lateribus AE, EC,trianguli AEC;& bases AB, AC, ponuntur etiam æquales: erunt anguli AEB,AEC, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectę,AE,AF,diuidant rectas BC, CD,bifariam, & ad angulos rectos, transibit vtraque producta per centrum circuli, per corollarium Propos. 1. huius lib. Punctum igitur A,in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum,non transiret vtraque per centrum. Si itaq; in circulo acceptum fuerit punctum,&c. Quod demonstrandum erat.

THEO

THEOREMA IX

PROPOSITIO X.

Circulus circulum in pluribus quam duobus, punctis non secat.

SEcent se ijdem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, B, & E, Inuentum autem sit I, centrum circuli AGB DHE, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ IA, IB, IE, quæ defin- circuli æquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum ABCDEF, assũptum est punctum I, à quo cadunt in circunferentiam plures, quam duæ, rectæ æquales, erit I, centrum circuli ABCD EF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE.

Duo

Duo ergo circuli ſe mutuo ſecantes, habent idem centrum. Quod eſt abſurdum.

THEOREMA X.

PROPOSITIO XI.

Si duo circuli ſe ſe intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TAngat circulus ABC, circulum ADF, intus in A, & ſit E, centrum circuli ABC, & G, centrũ circuli ADF, quod neceſſario ab illo diuerſum erit, cum duo circuli interius ſe tangentes, non poſſint idem centrum habere. Dico rectam extenſam per G, & E, cadere

G in

in contactum A. Si enim non cadit, secet vtrumque circulũ in punctis D,B,C,F, & ex contactu A, ad centra E, G, rectæ ducantur AE,AG. Quoniam igitur in triangulo A E G, duo latera GE, EA, maiora sunt latere GA. Est autem GA, recta rectæ GD ęqualis; (quod G, positum sit centrum circuli ADF) erunt & GE, FA, rectæ maiores recta GD. Dempta igitur communi GE, remanebit EA maior, quam ED. Quare cũ EA, æqualis sit ipsi EB, (quod E, positum fuerit centrum circuli ABC) erit & EB, maior, quam ED, pars quam totum, quod est absurdum.

THEO-

THEOREMA XI.

PROPOSITIO XII.

Si duo circuli se se exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

Circuli duo ABC, DBE, tangant se exterius in B, & centrum circuli ABC, sit F, circuli vero DBE, centrum sit G. Dico rectam extensam per F, & G, transire per contactũ B. Si enim non transit, secet circumferentias in C, & E, ducanturque à centris F, G, ad B, contactum rectæ F B, G B. Quoniam igitur in triangulo FBG, latera duo BF, BG, maiora sunt latere FG: Est autem recta B F, rectę F C equalis:

(quod F ponatur centrum circuli ABC,) & recta BG. rectæ GE, æqualis, (quod G ponatur centrum circuli DBE) erunt & rectę FC, GE, maiores quam recta FG, pars quam totum, (cum FG, cótineat prętor FC, GE, rectam adhuc CE,) quod est absurdum. Si igitur duo circuli se se exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandú.

THEOREMA XII.

PROPOSITIO XIII.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, siue intus, siue extra tangat.

TAngāt se se circuli ABCD, AECF, intus. si fieri potest, in pluribus punctis, quam vno

vno, A, & C. Assumantur autem centra horum circulorum G, H, quę diuersa erunt, per quæ recta GH, in vtramque partem extendatur, quam necesse est cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrum, & recta AGHC, diameter, diuidetur AGHC, bifariam in puncto G. Simili ratione diuidetur eadem AC, bifariam in H. quod est absurdum. Vna enim recta in vno dumtaxat puncto diuiditur bifariam. Si namque GC est dimidium totius AC, erit necessario HC, dimidio minor, cum sit pars dimidij GC.

THEOREMA XIII.

PROPOSITIO XIV.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro. Et quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

Sint in circulo ABCD, cuius centrum E, duę rectæ æquales AB, CD. Dico ipsas æqualiter distare à centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas AB, CD, duæ perpendiculares EF, EG, & coniungantur rectę EA, FD. Secabunt rectę EF, EG, rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, ęquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectę videlicet AF, DG, ęqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum EA,

ED,

BD, ęqualium, inter ſe ſunt ęqualia; Quadratum autem rectę EA, ęquale eſt quadratis rectarum & quadratarum rectæ E D, quadratis rectarum D G, G E: Erunt quoque quadrata rectarum A F, F E, æqualia quadratis rectarum DG,GE Ablatis ergo quadratis ęqualibus æqualium rectarum AF,DG, remanebunt quadrata rectarum FE,GE, ęqualia, ideoque & rectę EF, FG, æquales erunt. Diſtant igitur per 4. defin. huius lib. rectę AB, CD, ęqualiter à centro E.

Rurſus diſtent rectę AB,CD, ęqualiter à centro E. Dico eas inter ſe eſſe ęquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad AB, CD, perpẽdiculares EF, EG, quæ per 4. definit. huius lib. ęquales erunt; diuidentq; rectas AB,CD bifariam, Ductis

Igitur rectis EA, ED, erunt earũ quadrata ęqualia: Eſt autem quadratum rectæ EA, ęquale quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectę ED, æquale quadratis rectarum DG, GE. Igitur & quadrata rectarum AF, FE, ęqualia ſunt quadratis rectarum DG, GE; ideoque ablatis æqualibus quadratis ęqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum AF, DG ęqualia; atque adeo rectę AF, DG, ac propterea earum duplę AB, CD, ęquales quoque erunt. Itaque in circulo ęquales rectę lineę ęqualiter diſtant à centro, &c. quod erat demonſtrandum.

THEO-

THEOREMA XIV.

PROPOSITIO XV.

In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem, propinquior centro, remotiore semper maior.

IN circulo ABCDEF, cuius centrum G, diameter sit A F; & recta ei propinquior Hi, remotior autem CD. Dico omnium esse maximam AF, & HI, maiorem quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ GK, GL, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior est CD, à cẽtro, quam HI, erit GK, maior quam GL, per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex GK, recta GM, ipsi GL ęqualis, atq; per M, educatur BME, perpen-

dicularis ad GK, & connectãtur rectę GB, GC, GD, GE; Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM, GL, ęquales sũt, equaliter distabunt rectę BE, HI, à centro, per 4. defin. huius lib. & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectę GB, GE, maiores quidem sunt recta BE, ęquales autem diametro AF; erit & diameter AF, maior, quam BE. Eãdem ratione ostẽdetur AF, maior omnibus alijs lineis. Deinde quia latera GB, GE, trianguli BGF, æqualia sunt lateribus GC, CD, triãguli CGD; & angulus BGE, maior est angulo CGD; erit recta BE, maior quam CD; atque adeo HI, quę ęqualis ostensa fuit ipsi BE, maior quoque erit quã CD. In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XV.

PROPOSITIO XVI.

Quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprahensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi, quidem angulus, quoquis angulo acuto rectilineo maior, est; reliquus autem minor.

IN circulo ABC, cuius centrum D, diameter sit AC, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularē necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ip-

sum, qualis est AB; ducta DB, erunt duo anguli DAB, DBA, æquales, sed DAB, rectus est, per constructionem: Igitur & DBA rectus erit, quod est absurdum. Duo enim anguli in triangulo minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; neq; eandem ob causam in ipsam circumferentiam, sed extra, qualis est EF. Dico iam ex A, inter A E, rectam, & circumferentiam AB, non posse cadere alteram rectam. Cadat enim, si fieri potest, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis CH, secans circumferentiam in I, quæ necessario ad partes anguli acuti DAG, cadet, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 1. Quoniam igitur in triangulo DAH, duo anguli DHA, DAH, minores sunt duobus rectis; & DHA, rectus

rectus est, per constructionem, erit angulus DAH, recto minor, ideoque recta DA, hoc est, recta illi æqualis DI, maior erit quam DH, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter AE, & circumferentiam AB: sed quæcunque ex A, ducatur infra AE, ea secabit circulum. Dico denique angulum semicirculi, contentum diametro AC, & circumferentia AB, maiorem esse omni acuto angulo rectilineo; reliquum vero angulum contingentiæ, qui continetur recta AE, & circumferentia AB, minorem esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim ostensum est, omnẽ rectam ex A, ductam, infra perpendicularem AE, cadere intra circulum, faciet necessario ea linea, cum AC, angulum rectili-

neum

neum acutum minorem angulo ſemicirculi; at vero cum AE, angulum rectilineum acutum maiorem angulo contingentiæ, cum ille ſit pars anguli ſemicirculi, hic vero totum quidpiam reſpectu anguli cõtingentiæ. Id quod liquido conſtat, ducta recta AB, quomodocunqe infra AE. Nam cũ hæc linea AB, intra circulum cadat, vt demonſtratum eſt, erit angulus rectilineus acutus CAB, minor angulo ſemicirculi contento ſub diametro AC, & circumferentia ABC, cum ille huius ſit pars: Angulus vero contingentię contẽtus ſub tangente linea AE, & circumferentia ABC, minor angulo rectilineo acuto BAE, quod ille huius pars ſit. Eademque ratio eſt de omnibus alijs angulis acutis rectilineis, cum omnes
con-

contineantur à diametro AC, vel tangente AE, & rectis ex A, ſub AE, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, vt demonſtrauimus. Angulus igitur ſemicirculi maior eſt omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentię, minor. Itaque quæ ab extremitate diametri, cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat oſtendendum.

PROBLEMA II.

PROPOSITIO XVII.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

Ex puncto A, ducenda ſit linea, quæ tangat circulum

lum BC, cuius centrum D. Ducatur recta AD, secans circulum BC, in B. Deinde centro D, interuallo, autem DA. describatur circulus AE, & ex B educatur B E perpendicularis ad AD, secans circulum AE in E. Ducta deniq; recta ED, secante circulũ BC, in C. connectatur recta AC: quam dico tangere circulum BC, in C. Cum enim duo latera DE, DB. trianguli B DE, equalia sint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, vtrumq; vtriq; vt constat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus sit communis: Erunt & bases B E, CA, & anguli DBE, DCA, super ipsas, æquales. Est autem DBE, rectus ex constructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaque CA, cum sit perpendicularis, ducta ad C, extremum se-
mi-

midiametri CD, tanget circulum, per corollarium præcedētis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est AC, recta tangens circulum BC, in C. quod faciendum erat.

THEOREMA XVI.

PROPOSITIO XVIII.

Si circulum tangat recta quæpiā linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

Recta linea AB, tangat in C, circulū CD, cuius centrū E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem esse ad AB. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis

lum BC, cuius centrum D. Ducatur recta AD, secans circulum BC, in B. Deinde centro D, interuallo, autem DA. describatur circulus AE, & ex B educatur B E perpendicularis ad AD, secans circulum AE in E. Ducta deniq; recta ED, secante circulũ BC, in C. connectatur recta AC: quam dico tangere circulum BC, in C. Cum enim duo latera DE, DB. trianguli B DE, ęqualia sint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, vtrumq; vtriq; vt constat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus sit communis: Erunt & bases B E, CA, & anguli DBE, DCA, super ipsas, æquales. Est autem DBE, rectus ex constructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaque CA, cum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semi-

midiametri CD, tanget circulum, per corollarium præcedẽtis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est AC, recta tangens circulum BC, in C. quod faciendum erat.

THEOREMA XVI.

PROPOSITIO XVIII.

Si circulum tangat recta quæpiã linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

Recta linea AB, tangat in C, circulũ CD, cuius centrũ E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem esse ad AB. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis

ris ad AB, secans circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo CEF, duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis; Et est EFC rectus ex constructione: erit ECF, minor. Quare maior erit recta EC, hoc est, ED, quam EF pars quam totum, quod est absurdum. Est igitur EC, perpendicularis ad AB. Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat.

Aliter EC, non est perpendicularis ad AB, erit alter angulorum ad C, obtusus, & alter acutus. Sit ergo ECB, acutus, qui cum maior sit angulo semicirculi ECD, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum. Omnis siquidem angulus semicirculi maior est omni acuto.

THEO-

THEOREMA XVII.

PROPOSITIO IX.

Si circulum tetigerit recta quapiã linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tãgenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TAngat recta AB, circulum CDE, in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis ad AB Dico in CE, esse centrum circuli. Si enim est extra CE, sit F, centrum, à quo ad C, ducatur recta FC, quæ perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, æqualis erit pars toti: quod est absurdum. Non igitur extra CE, centrum circuli existet. Itaque si circulum tetigerit recta

cta quæpiam linea,&c. Quod erat demonstraudum.

THEOREMA XVIII.

PROPOSITIO XVIII.

In circulo,angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN circulo ABC, cuius centrum D,super basin BC,cõstituatur angulus BDC,ad cẽtrum , & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriã. Dico angulum BDC,duplum esse anguli BAC. per centrum D,recta extendatur AE. Quoniam igitur rectę DA,DB,ęquales sunt,erunt anguli DAB,DBA,æquales: Est autem externus angulus BDE,ęqualis duobus

bus angulis internis DAB, DB A. Quare BDE, duplus erit alterius eorum, vt anguli DAB. Eodem modo duplus ostendetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC. Quando enim duę magnitudines duarum sunt duplæ, singulæ singularum, est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplū. Constat ergo propositum, & eodem fere modo ostendetur alijs casibus.

THEO-

THEOREMA XIX.

PROPOSITIO XXI.

In circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli sunt, inter se æquales.

IN circulo ABCD, cuius centrum E existant anguli A, & B, in segmento DABC. Dico eos esse ęquales. Sit enim segmentum DABC, primum semicirculo maius; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, duplus est tam anguli D A C, quàm DBC, ad peripheriam, cum omnes habeant eandem basim DC; erunt anguli A, & B, dimidiatę partes anguli E. Quare inter se ęquales erunt. Eademque ratione omnes

omnes alij anguli exiſtentes in ſegmento DABC, oſtendentur eſſe ęquales.

THEOREMA XX.

PROPOSITIO XXII.

Quadrilaterorum in circulis deſcriptorum anguli, qui ex adverſo, duobus rectis ſunt æquales.

IN circulo, cuius centrum E, inſcriptum ſit quadrilaterũ ABCD. Dico duos angulos oppoſitos ABC, CBA. Item BCD, DAB, æquales eſſe duobus rectis. Ductis enim diametris duabus quadrilateri AC, BD, erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem ſegmento ABCD, æquales. Similiter erunt duo anguli CBD, CAD, in eodem

ſeg

segmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus ABC, equalis est duobus angulis AC D, C A D. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, equales tribus angulis ACD, CAD, CDA. Sed hi tres æquales sunt duobus rectis. Igitur, & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos BCD, DAB, duobus esse rectis equales. Nam rursus duo anguli ABD, ACD, sunt æquales: Item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, equalis erit. Addito igitur communi angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD, equales tribus angulis A B D, BDA, DAB. Sed hi tres sunt equales duobus rectis. Igitur & duo

& duo BCD, DAB, duobus rectis ęquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorum, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOREMA XXI.

PROPOSITIO XXIII.

Super eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inaequalia, non constituentur ad easdem partes.

SI enim fieri potest super recta AB, constituantur ad easdem partes duo segmenta similia. & inęqualia ACB, ADB. Perspicuum est autem, quod se solum intersecent in punctis A, & B; circulus enim circulum non secat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde periphe-

ria vnius segmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AD, secans circumferentias in C, & D, & connectantur rectę CB, DB. Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit per 10. defin. huius lib. angulus ACB, æqualis angulo ADB, externus interno: quod est absurdum. Non igitur segmenta sunt similia: Quare super eadem recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXII.

PROPOSITIO XXIV.

Super æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

SVper rectis lineis ęqualibus AB, CD, constituta sint seg-

ſegmenta ſimilia AEB, CFD. Dico ea inter ſe eſſe æqualia. Lineę enim AB, CD, cum ſint ęquales, congruent inter ſe, ſi altera alteri ſuperponatur. Dico igitur & ſegmentum AEB ſegmento CED congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod ſi extra cadat, aut intra, conſtituentur ſuper eadem recta CD, duo ſegmenta AEB, AFB, ſimilia, & inæqualia, quorum vnum totum extra aliud cadit, quod eſt abſurdum. Demonſtratum enim eſt contrarium. Quod ſi partim extra cadat, partim intra, ſecabunt ſe ſe in pluribus punctis, quam duobus, duo circuli. quod eſt abſurdum. Circuli enim non ſe ſecant in pluribus punctis, quam duobus. Congruet igitur ſegmentum

AEB, ſegmento CFD, atque adeo ipſa inter ſe æqualia erunt. Quocirca ſuper ęqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROBLEMA III.

PROPOSITIO XXV.

Circuli ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum.

SIt ſegmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam ſecetur in D, pũcto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, vel maior eſt angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Si maior, (quod quidem continget, quando ſegmentum ABC, minus fuerit ſemicirculo: Tunc

Tunc enim, quia BD trãſit per centrum;ex corollario propoſ. 1. huius lib. quod eſt extra ſegmentum, cum ponatur eſſe minus; erit DA, maior,quã DB, cum DB perficiens diametrum ſit omnium minima, quæ ex puncto D, in circunferentiam cadunt. Quare angulus DBA, maior erit angulo DAB.)omnino ſi eſt fiatq; angulus BAE, æqualis angulo DBA,& ſecet recta AE,rectam BD, productam in E. Dico E, eſſe centrum circuli, cuius ſegmentum ABC. Ducta enim recta EC,erunt latera AD,DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD,DE, trianguli CDE, & anguli contenti, recti. Quare baſes EA, EC, æquales erunt. Eſt autem & EA, æqualis ipſi EB, quod anguli EAB,EBA, æquales ſint. Igitur tres lineæ EA, EB,EC, ęquales

erunt, ac propterea E, centrũ erit circuli ABC, quandoquidẽ ex E, plures quam duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam.

THEOREMA XXIII.

PROPOSITIO XXVI.

In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G,H, constituti sint primum ad centra anguli equales AGC, DHF. Dico peripherias AC, DF, quibus insistunt, siue super quas ascenderunt, esse equales. Sumantur enim in peripherijs ABC,

ABC,DEF, duo puncta B,E, ad quę rectę ducantur AB, CB, DE, FE, connectanturque rectę AC,DF Quoniam igitur anguli B,& E, dimidij sunt æqualium angulorum G,& H; erunt & ipsi equales inter se. Quare ex definitione segmenta ABC, DEF,similia erunt. Et quia latera AG,GC,trianguli AGC, æqualia sunt lateribus DH, HF, trianguli DHF, propter circulorum æqualitatem, & anguli, quos continent,G,H, æquales, ex hypothesi; erunt bases AC, DF,ęquales. Cum igitur segméta similia ABC, DEF, sint super lineas ęquales AC, DF, erunt ipsa inter se ęqualia. Quare si à circulis æqualibus demātur, remanebunt, & segmenta AC, DF, inter se ęqualia; atq; adeo peripheriæ AC, DF: Quod est propositum.

Sint deinde ad peripherias constituti duo anguli ęquales B, & E. Dico rursus, peripherias AC, DF, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, vt prius, segmenta ABC. DEF, similia. Cum igitur sint super æquales lineas AC, DF: (cum enim anguli G, H, æquales sint, quod sint dupli angulorum æqualium B, & E: erunt, vt prius, rectæ AC, DF ęquales) erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur à circulis ęqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta AC, DF, æqualia. In æqualibus itaque circulis, ęquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XXIV

PROPOSITIO XXVII

In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G,H, insistant primum anguli ad cẽtra AGC,& DHF,æqualibus peripherijs AG, DF. Dico angulos AGC,& DHF,æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit angulus G, maior, fiatque angulus AGI, equalis angulo DHF. Erunt igitur peripheriæ AI, DF, ęquales. Cum igitur peripheria AC,æqualis ponatur peripheriæ DF, erunt peripheriæ AI, AC, inter se ęquales, pars,

& totum; quod eſt abſurdum. Sunt ergo anguli AGC, DHF, æquales,

Inſiſtant deinde eiſdem peripherijs ęqualibus AC, DF, anguli B,&E,ad peripherias,quos rurſus dico ęquales eſſe. Nam ſi alter,vt ABC, maior eſt: fiat angulo E,ęqualis angulus ABI, eruntque peripherię A I, D F, ęquales. Quare,vt prius,erunt peripherię AI,AC,ęquales,pars & totum; quod eſt abſurdum. Sunt ergo anguli ABC, DEF, ęquales. In ęqualibus igitur circulis, anguli,qui ęqualibus peripherijs inſiſtunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEO-

THEOREMA XXV.

PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minori autem minori.

IN circulis ęqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sint rectæ ęquales AC, DF, Dico maiorem peripheriam ABC, ęqualem esse maiori DEF & minorem AC; minori DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, ęqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF, Ponuntur autem & bases AC, DF, ęquales. Igitur anguli G, & H, ęquales erunt: ac propterea peripheriæ AC, DF, quibus

insistunt, ęquales erunt; quæ ablatæ ex totis ęqualibus, relinquent etiam ęquales ABC, DEF. In ęqualibus ergo circulis æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXVI.

PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

IN circulis eisdem ęqualibus ponantur ęquales peripheriæ ABC, DEF; Item AC, & DF. Dico rectas AC, DF, quę eas subtendunt, esse ęquales. Ductis enim lineis, vt prius erunt latera AG, GC, trianguli AGC, ęqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF: Sunt autē

&

& anguli G,H, æquales, quod æqualibus peripherijs AC, DF, insistant. Igitur bases AC, DF, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, ęquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

PROBLEMA IV.

PROPOSITIO XXX.

Datam peripheriam bifariam secare.

SIt peripheria *A*BC, secanda bifariam. Ducatur recta subtendens AC, qua diuisa bifariam in D, erigatur perpendicularis DB, quæ peripheriam ABC, bifariam secabit in B. Ductis enim rectis AB, CB, erunt latera AD, BD, trianguli ADB, æqualia lateribus CD, DB, triã-guli

guli CDB: Sunt autem & anguli ad D, ęquales, nempe recti. Igitur & bases AB, CB, æquales erunt; ac propterea peripheriæ AB, CB, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam secuimus. Quod erat faciendum.

THEOREMA XXVII

PROPOSITIO XXXI.

In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui vero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto.

CIrculi enim ABC, cuius centrum D, diameter sit AC,

A C, constituaturque in semicirculo angulus ABC, existetq; angulus BAC, in maiori segmẽto CAB. Constituatur quoque in CEB, minori segmento angulus BEC. Dico angulũ ABC, in semicirculo rectum esse; angulum vero BAC, in maiore segmento, minorem recto: & angulum BEC, n minori segmento, maiorem recto. Item angulum maioris segmenti cõprehensum recta BC, & peripheria BAC, esse recto maiorẽ. At angulum minoris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria BEC, recto minorem. Ducatur enim recta BD, ad centrum; & extendatur AB in F. Quoniam igitur rectę DA, DB, ęquales sunt, erit angulus DB*A*, angulo DAB, ęqualis. Eadem ratione erit angulus DBC, angulo DCB, ęqualis,

ideo-

ideoque totus angulus ABC, duobus angulis BAC, BCA, æqualis erit. Eſt autem & angulus FBC, externus eiſdem duobus internis angulis BAC, BCA in triangulo ABC ęqualis. Quare ęquales erunt inter ſe anguli ABC, FBC; ac propterea vterque rectus. Rectus igitur eſt angulus ABC; quod eſt primum.

Quoniam vero in triangulo ABC, duo anguli ABC, & BAC ſunt duobus rectis minores; Et eſt angulus ABC oſtenſus rectus: Erit angulus BAC, in ſegmento maiori, recto minor; quod eſt ſecundum.

Rurſus, quia in quadrilatero ABEC, intra circulum deſcripto, duo anguli oppoſiti BAC, & BEC, ſunt duobus rectis æquales; Et angulus BAC oſtenſus eſt recto minor: Erit BEC,

angu-

angulus in ſegmento minore, recto maior: quod eſt tertium.

Quartum patet ex demonſtratis angulis enim ſegmentorum, vel additur, vel detrahitur recto.

THEOREMA XXVIII

PROPOSITIO XXXII.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum ſecans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sūt ijs, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis.

TAngat recta *A*B, circulum CDE, in C, puncto, à quo ducatur recta CE, diuidens circulum in duo ſegmenta, in quibus fiant anguli CGE, CDE.

Dico

Dico angulum ACE, ęqualem esse angulo CGE, in alterno segmento; & angulum BCE, angulo CDE, in alterno quoq; segmento. Ducta igitur recta CF, per centrum, connectatur recta EF: eritque CF perpendicularis ad AB, & angulus CEF, rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt vni recto, vt angulo recto ACF. Dempto ergo communi angulo ECF, erit reliquus A C E, reliquo C F E, æqualis est autem angulo CFE ęqualis quoque angulus CGE, cum vterque sit in segmento C G E. Quare angulus A C E, angulo CGF, ęqualis erit. Quoniam vero in quadrilatero C D E G, duo anguli CDE, CGE, duobus sunt rectis æquales: Sunt autẽ & duo anguli ACE, BCE, duobus rectis ęquales; si auferantur

tur æquales anguli ACE, CGE, remanebit angulus B C E, angulo CDE, equalis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem, &c. Quód erat ostendendum.

PROBLEMA V.

PROPOSITIO XXXIII.

Super data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

AD punctùm A, fiat angulus DAB, equalis angulo C, acuto; & agatur ad D A, perpendicularis A E, quæ cadet supra AB. Fiat deinde angulo FAB, equalis angulus FBA, secetque BF, rectam AE, in F. Erunt igitur rectæ FA, FB, æquales. Quare si centro F, & in-

interuallo FA, circulus deſcribatur AGB, tranſibit is per B. Dico igitur angulum in ſegméto AGB, quod deſcriptum eſt ſuper AB, eſſe ęqualem angulo C. Fiat enim angulus in dicto ſegmento AGB. Quia igitur AE per centrum F, tranſit, & ei perpendicularis eſt DA, tanget *DA*, recta circulum in A, per Coroll. propoſ. 16. huius lib. Quapropter angulus DAB, hoc eſt, angulus datus C, ęqualis erit angulo G, in ſegmento alterno AGB.

Si vero ſit angulus datus H, obtuſus. Fiat rurſus angulo H, ęqualis angulus IAB, & agatur ad I*A*, perpendicularis AE, quę ſupra AB, cadet. Reliqua omnia fiant, vt prius, deſcriptũq; erit ſuper AC, ſegmētum AKB, in quo angulus K, equalis eſt angulo dato obtuſo H. Nam an-

angulus IAB, hoc eſt, angulus datus H, ęqualis eſt angulo K, in alterno ſegmento AKB. Eadem enim eſt demonſtratio. Itaque ſuper data recta linea deſcripſimus ſegmentum, &c. Quod efficiendum erat.

PROBLEMA VI.

PROPOSITIO XXXIV.

A dato circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

DAtus circulus ſit *A* B C, à quo auferre oporteat ſegmentum, in quo angulus exiſtẽs ęqualis ſit dato angulo D. Ducatur recta EF, tangens circulum in A. Fiat deinde angulus FAE, ęqualis angulo dato D. Dico igitur triangulum

ACB

ACB, in ſegmento ablato ACB, æqualem eſſe dato angulo D, Eſt enim angulus FAC, æqualis angulo B, in alterno ſegmento ACB. Cum ergo angulo dato D, factus ſit æqualis angulus FAC, erit quoque angulus B, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abſcidimus ſegmentum ACB, &c. Quod erat faciendum.

THEOREMA XXIX

PROPOSITIO XXXV

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius, æquale eſt ei; quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

SEcet CD, tranſiens per cētrum rectam AB, non bifariam,

riam. Secetur ergo AB, bifariam in G, ducantúrque rectæ FG, FB, eritque FG, perpendicularis ad AB. Quoniam recta CD, diuisa est bifariam in F, & non bifariam in E, erit sane rectangulum sub CE, ED, vna cũ quadrato rectæ FE, æquale quadrato rectæ FD, hoc est, quadrato rectæ FB: Est autem quadratum rectæ EF, æquale quadratis rectarum FG, GE, & quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG, GB, erit quoque rectangulum sub CE, ED, vna cum quadratis rectarum FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo communi quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectę GE, æquale quadrato rectæ GB. Atqui etiam rectangulum sub AE, EB, vna cum quadrato

enim DA, secans vtcunque. Diuisa ergo A C, bifariam in F, ducãtur rectæ EB, EC, ED, EF: eritq; EB, ad BD, perpendicularis; & EF, ad AC. Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta CD, erit rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ C F, ęquale quadrato rectæ D F. Addito igitur communi quadrato rectę FE, erit rectangulũ sub DA, DC, vna cum quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarum DF, FE: Est autem quadratis rectarum CF, F E, ęquale quadratum rectæ E C, ideoq; & quadratũ rectę EB; & quadratis rectarum DF, FE, ęquale est quadratum rectę DE. Quare rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectę EB, ęquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur quadra-

tum

tum rectę DE, ęquale fit quadratis rectarum DB, BE. erit & rectangulum ſub DA, DC, vna cum quadrato rectæ E B, ęquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo cõmuni quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum ſub DA, DC, quadrato rectæ DB, ęquale: quod eſt propoſitum. Si igitur extra circulum ſumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonſtrandum.

drato rectę GE, æquale est eidē quadrato rectæ GB: propterea quod recta AB; secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED vna cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vna cum quadrato eiusdē rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, ęquale rectangulo sub AE. EB. quod est propositum.

Quod si neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra facilè fere eodem medio fiet demonstratio: vnde cum non sit noua difficultas, aliud non addo, si igitur in circulo duę lineæ, &c. Quod demonstrandū erat.

THEO-

THEOREMA XXX.

PROPOSITIO XXXVI.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulũ secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta comprahenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

Extra circulum ABC, punctum sumatur D, à quo linea ducatur DA, secans circulum in C, & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectãgulum sub DA, DC, æquale esse quadrato rectæ DB. Transeat

drato rectę GE, æquale est eidē quadrato rectæ GB: propterea quod recta AB; secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED vna cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vna cum quadrato eiusdē rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, ęquale rectangulo sub AE. EB. quod est propositum.

Quod si neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra facilè fere eodem medio fiet demonstratio: vnde cum non sit noua difficultas, aliud non addo, si igitur in circulo duę lineæ, &c. Quod demonstrandū erat.

THEO-

THEOREMA XXX.

PROPOSITIO XXXVI.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulũ secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta comprahenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

Extra circulum ABC, punctum sumatur D, à quo linea ducatur DA, secans circulum in C, & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectãgulum sub DA, DC, æquale esse quadrato rectæ DB. Transeat

drato rectę GE, æquale est eidẽ quadrato rectæ GB: propterea quod recta AB; secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED vna cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vna cum quadrato eiusdẽ rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, ęquale rectangulo sub AE. EB. quod est propositum.

Quod si neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra facilè fere eodem medio fiet demonstratio: vnde cum non sit noua difficultas, aliud non addo, si igitur in circulo duę lineæ, &c. Quod demonstrandũ erat.

THEO-

THEOREMA XXX.

PROPOSITIO XXXVI.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulũ ſecet, altera vero tangat: Quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam aſſumpta comprahenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato.

EXtra circulum ABC, punctum ſumatur D, à quo linea ducatur DA, ſecans circulum in C, & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectãgulum ſub DA, DC, æquale eſſe quadrato rectæ DB. Tranſeat

drato rectę GE, æquale est eidē quadrato rectæ GB: propterea quod recta AB; secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED vna cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vna cum quadrato eiusdē rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, ęquale rectangulo sub AE. EB. quod est propositum.

Quod si neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra facilè fere eodem medio fiet demonstratio: vnde cum non sit noua difficultas, aliud non addo, si igitur in circulo duę lineæ, &c. Quod demonstrandū erat.

THEO-

THEOREMA XXX.

PROPOSITIO XXXVI.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulũ ſecet, altera vero tangat: Quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam aſſumpta comprahenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato.

EXtra circulum ABC, punctum ſumatur D, à quo linea ducatur DA, ſecans circulum in C, & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectãgulum ſub DA, DC, æquale eſſe quadrato rectæ DB. Tranſeat

enim DA, secans vtcunque. Diuisa ergo A C, bifariam in F, ducātur rectæ EB, EC, ED, EF: eritq; EB, ad BD, perpendicularis; & EF, ad AC. Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta CD, erit rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ C F, ęquale quadrato rectæ D F. Addito igitur communi quadrato rectę FE, erit rectangulū sub DA, DC, vna cum quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarum DF, FE: Est autem quadratis rectarum CF, F E, ęquale quadratum rectæ E C, ideoq; & quadratū rectę EB; & quadratis rectarum DF, FE, ęquale est quadratum rectę DE. Quare rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectę EB, ęquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur quadra-

tum rectę DE, ęquale fit quadratis rectarum DB, BE. erit & rectangulum ſub DA, DC, vna cum quadrato rectæ E B, ęquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo cõmuni quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum ſub DA, DC, quadrato rectæ DB, ęquale: quod eſt propoſitum. Si igitur extra circulum ſumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XXXI.

PROPOSITIO XXXVII.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat; ſit autem, quod ſub tota ſecãte, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam aſſumpta, comprahenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur, quadrato; Incidens ipſa circulum tanget.

EXtra circulum ABC, cuius centrum E, punctum ſumatur D, à quo ducatur recta DA, circulum ſecans in C, & recta DB, incidens in circulum ad

ad punctum B, sitque rectangulum sub DA, DC, equale quadrato rectæ DB. dico DB, circulum tangere in B. ducatur enim DF, tangens circulum, & iungantur rectæ EB, EF. Quod si DA, secans, non transeat per centrum E, iungatur quoque recta DE. Quoniam igitur rectangulo sub DA, DC, equale est quadratum rectę tangentis DF: Et eidem rectangulo sub DA, DC, equale ponitur quadratum rectę DB: erunt quadrata rectarum DF, DB, inter se equalia; ideoque & rectæ DF, DB, equales inter se erunt. Itaque quia latera DF, FE, trianguli DFE, equalia sunt lateribus DB, BE, trianguli DBE; & basis DE, communis erunt anguli DFE, DBE, equales. Atqui angulus DFE, rectus est, quod DF, circulum tangat.

Igitur & angulus *DBE*, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. *DB*, circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

EV-

EVCLIDIS

ELEMENTORVM

LIBER QVARTVS.

DEFINITIONES.

1 Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.

2. Similiter, & figura circum figuram describi dicitur, cũ singula eius, quę circumscribitur, latera singulos eius figurę angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

3 Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli

eius figurę, quæ inſcribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

4. Figura vero rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, cum ſingula latera eius, quæ circunſcribitur, circuli peripheriam tangunt.

5. Similiter, & circulus in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingula latera tangit eius figuræ, cui inſcribitur.

6. Circulus autem circum figuram deſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingulos tangit eius figurę, quam circumſcribit, angulos.

7. Recta linea in circulo accōmodari, ſeu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

PRO-

PROBLEMA I.

PROPOSITIO I.

In dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.

IN circulo ABC, coaptanda sit recta linea ęqualis rectæ lineę datę G, quæ tamen maior non sit diametro circuli dati. Cum enim diameter sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta diametro maior foret, non posset in circulo aptari illi vna ęqualis. Ducatur ergo diameter B C. Itaque si data recta G, æqualis fuerit diametro, aptata erit BC, illi ęqualis: Si vero G, minor fuerit diametro, abscinda-

tur BE, ęqualis ipſi G, & centro B, interuallo autem BE, circulus deſcribatur EA, ſecans circulum ABC, in A. Ducta igitur recta BA, erit ea aptata in circulo ABC, ęquali datę rectę G. Eſt enim BA, ęqualis ipſi BE & G, ęqualis eidem BE, per conſtructionem. Quare AB, & G, inter ſe ęquales quoque erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod erat faciēdum.

THEO-

THEOREMA II.

PROPOSITIO II.

In dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

SIt in circulo *ABC*, dato describendum triangulum æquiangulum triangulo dato cuicunque DEF. Ducatur recta GH, tangens circulum in A, fiatque angulus GA*B*, angulo F, ęqualis, & angulus H*AC* angulo *E*, atque extendantur rectæ *AB*, *AC*: ad circumferentia vſq; in puncta *B*, & *C*, coniugaturque recta *BC*. Non cadet autem recta *AG*, in rectam *AB*, vel inter rectas *AB*, *AG*, propterea quod anguli G*AB*, H*AC*, hoc eſt, anguli F, *E*, mino-

res sunt duobus rectis. Essent autem duobus rectis æquales, si *AC*, in *AB*, caderet; vel maiores duobus rectis, si inter *AB*, *AG*, caderet. Dico triangulum *ABC*, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo DEF. Est enim angulus C, æqualis angulo G*AB*; & eidem angulo G*AB*, æqualis est angulus F, ex constructione. Quare anguli C, & F, inter se quoque erunt æquales. Similiter quia angulus *B*, æqualis est angulo H*A*C; & eidem angulo HAC, æqualis est, per constructionem, angulus E, erunt etiam anguli *B*, & *E*, inter se æquales. Cum igitur duo anguli *B*, & *C*, trianguli *ABC*, æquales sint duobus angulis *E*, & F, trianguli DEF, erunt quoque reliqui anguli *A*, & D, æquales. Æquiangulum est ergo triangulum *ABC*, triã-

gulo

gulo DEF. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

PROBLEMA III.

PROPOSITIO III.

Circa datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

CIrca circulum datum AB C, describendum sit triãgulum ęquiangulum dato triãgulo DEF. Producto latere EF, vtrinque ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta vtcunque *AI*, & fiat angulus *AIB*, æqualis angulo DEG, & angulus *BIC*, angulo DFH. Deinde ex *A*,*B*,C, educantur ad *AI*, *BI*, *CI* perpendiculares KL,LM,MK, quæ circulũ

tan-

tangent in punctis *A*,*B*,C, per coroll.propoſ.16.lib.3.coibuntque in punctis K,I M. Si enim duceretur recta *AC*, fierent duo anguli K*AC*,KC*A*,duobus rectis minores, ac proinde *A*K CK,coibunt, &c. Nam recta hæc ducta *A*C, caderet ſupra rectas *A*I,CI, quod hæ angulũ conſtituant in I. Cum enim ſpatium circa I,ęquale ſit quatuor rectis,ex coroll.2. propoſ. 15. lib 1. hoc eſt, quatuor angulis ad E, & F, ſintq; duo anguli *A*I*B*, CI*B*, duobus angulis DEG, DFH, æquales; erit reliquum ſpatium *A*IC, reliquis duobus angulis DEF, DFE, æquale: Sed hi minores ſunt duobus rectis. Igitur & ſpatiũ *A*IC,minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit *A*IC. *A*lias ſpatium illud eſſet vel ęquale duobus rectis,ſi nimirum

AI,

AI,CI, vnam rectam lineã constituerent; vel maius duobus rectis, si recta AI, producta caderet supra I. C. Cadit igitur necessario AI, producta infra CI, atque idcirco angulus fiet AI C, ad partes K, & ducta recta AC, faciet eum AK, CK, duobus angulos minores duobus rectis, ideoque rectæ AK, CK, coibunt in K. Non secus ostẽdemus, AL, BL, coire in L, & CM BM, in M, quia ductæ rectæ A B, BC, facient cum AL, BL, CM, BM, angulos minores duobus rectis. Descriptum est igitur circa circulum triangulum KLM, quod dico esse æquiangulum triangulo DEF. Quoniã enim omnes anguli in quadrilatero AIBL, ęquales sunt quatuor rectis, vt ad 32. propos. lib. 1. ostensum fuit, & anguli IAL, IBL, sunt duo recti, erunt

reli-

reliqui AIB,& L, duobus rectis æquales. Cum igitur & anguli DEG,DEF,sint duobus rectis ęquales;si auferantur æquales AIB,DEG, remanebit angulus L,angulo DEF,ęqualis. Pari ratione ostendemus angulum M, æqualem esse angulo DFE, Reliquus igitur, angulus K, reliquo angulo D,ęqualis erit; atq; idcirco triangulum KLM,ęquiangulum triangulo DEF. Circa datum ergo circulũ,&c. Quod efficiendum erat.

PRO-

PROBLEMA IV.

PROPOSITIO IV.

In dato triangulo circulum inscribere.

SIt describendus circulus in dato triangulo ABC. Diuisis duobus angulis ABC, ACB, bifariam rectis BD, CD, quæ intra triangulum coeant in D, ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares DE, DF, DG. Quoniam igitur duo anguli DBE, DEB, trianguli DBE, equales sunt duobus angulis DBF, DFB, triãguli DBF, vterque vtrique; & latus BD, commune; erunt quoque latera DE, DF equalia, Eademque ratione equalia erunt latera DF, DG, in triangulis DCF, DCG. Cum igi-

tur

tur tres rectæ DE, DF DG, sint æquales; circulus ex D, ad interuallum DE, descriptus transibit per reliqua puncta F, & G; tangetque latera trianguli in E, F, G per coroll. propos. 16. lib. 3. quod latera perpendicularia sint ad semidiametros D E, DF, DG In dato ergo triangulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.

PROBLEMA V.

PROPOSITIO V.

Circa datum triangulum circulum describere.

Sit circulus describēdus circa datum triangulum AB C Diuidantur duo latera AB, AC, (quę in triãgulo, rectãgulo vel obtusangulo sumenda sút faci-

facilitatis gratia, circa rectum, vel obtusum angulum, quamuis hoc non sit omnino necessarium, sed duo quæuis latera bifariam possint secari) bifariam in D,& E,punctis, ex quibus educantur DF,EF;perpendiculares ad dicta latera,coeũtes in F, (Quod enim coeant, patet. Nam si ducta esset recta DE,fierent anguli FDE, FED;duobus rectis minores) eritque F,vel intra triangulum,vel in latere BC,vel extra triangulum. Ducantur rectæ FA,FB, FC. Quoniam igitur latera AD, DF,trianguli ADF,æqualia sunt lateribus BD,DF, trianguli BDF,& anguli ad D,recti;erunt bases FA,FB æquales. Eodem modo erunt FA,FC, equales. Cum ergo tres rectæ FA,FB, FC, sint æquales, circulus descriptus ex F, ad interuallum

FA.

FA, transibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triangulum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBLEMA VI.

PROPOSITIO VI.

In dato circulo quadratum describere.

Sit in dato circulo ABCD, cuius centrum E, inscribēdum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se se ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico ABCD, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera EA, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus EC, EB, trianguli CEB cum omnia sint ex centro; & anguli

anguli contenti sunt recti erũt Bases AB,BC,ęquales. Eadem ratione ęquales erunt rectæ B C,CD, Item rectæ CD,DA, & rectæ DA,AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD,æqualia inter se sunt. Quod breuius ita concludemus. Quoniã quatuor anguli ad E, æquales sunt,nimirum recti,erunt quatuor arcus,quibus insistunt; æquales;ac proinde & rectę quatuor subtensæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri ABCD,inter se æqualia sunt autem & anguli recti,cum omnes in semicirculi existant. Quare quadratum erit ABCD, proptereaq; in dato circulo quadratum descripsimus.Quod erat faciendum.

PRO-

PROBLEMA VII.

PROPOSITIO VII.

Circa datum circulum quadratum describere.

SIt circa datum circulum ABCD, cuius centrum E, describendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, B,D, secantes se in E, centro ad angulos rectos; & per A, B. C,& D, educãtur ad diametros lineæ perpendiculares FG. FH, HI, IG, coeuntes in punctis F, H,I,G. Quod enim coeant AF, BF, patet ex eo, quod ducta recta AB, faciat cum AF, BF, duos angulos duobus rectis minores; atq; ita de reliquis. Dico FHIG, esse quadratum circa circulum datum descriptum.

Cum

Cum enim anguli AEB, FBE, ſint recti; erunt FH, AC, parallelę; ſimiliterque erunt GI, AC, parallelæ. Quare & FH, GI, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt FG, HI. Quoniam igitur parallelogrammum eſt ACHF, erunt latera oppoſita AC, FH, æqualia, & anguli oppoſiti ACH, AFH, ęquales. Sed ACH eſt rectus. Igitur AFH rectus erit. Eadem ratione oſtendemus angulos H, I, G, rectos eſſe; & latera HI, IG, GE equalia eſſe diametris BD, AC. Quare cum diametri ſint æquales, erunt & quatuor latera FG, FH, HI, IG, ęqualia, ideoque FGIH quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propoſ. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum deſcripſimus. Quod erat efficiendum.

PRO-

PROBLEMA VIII.

PROPOSITIO VIII.

In dato quadrato circulum describere.

Sit in dato quadrato ABCD, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariam in E. F, G, H, ducantur rectæ EG, FH, secantes se in I. Quoniam igitur AD, BC, rectæ æquales sūt, & parallelę, erunt, & dimidiæ earum AH, BF, ęquales, & parallelę. Quare & AB, parallela est, & ęqualis ipsi FH. Eadem ratione erit DC, parallela, & ęqualis eidem FH: Itemque rectę AD, BC, parallelę erunt, & ęquales ipsi EG. Sunt igitur parallelogramma AI, IB, CI, ID, ideoque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales

quales erunt rectis AH, EB, DH, AE: Sunt autem hæ inter se æquales, cum sint semisses æqualium AD, AB, &c. Quare & rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad interuallum IE, transibit quoque per puncta F, G, H, qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propos. 16. lib. 3. quod anguli ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat.

PROBLEMA IX.

PROPOSITIO IX.

Circa datum quadratum circulum describere.

Sit describendus circulus circa quadratum ABCD. Ducantur diametri AC, BD, secantes se in E. Quoniam igitur latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia sunt, erunt anguli AB D,ADB, æquales: Est autem angulus BAD, rectus. Quare ABD,ADB,semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A,B,C,D, esse semirectos; & idcirco inter se ęquales. Cum ergo anguli EAD,EDA, sint ęquales; erunt rectæ EA,ED,æquales. Eadem ratione EA,EB,ęquales erunt, nec-

necnon EB,EC. Item EC,ED. Quare circulus ex E, descriptus, interuallo EA, transibit per reliqua puncta B,C.D. Circa datum ergo quadratum, circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBLEMA X.

PROPOSITIO X.

Isosceles triangulum constituere; quod habeat vtrumque eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

SVmatur quęuis recta linea AB, quæ diuidatur in C, ita vt rectangulum sub AB, BC equale sit quadrato rectę AC. Deinde centro A, interuallo vero AB, circulus describatur, in quo accommodetur recta BD,

ęqualis ipsi AC, iungaturque recta AD. Quoniam autem rectę AB, AD, ęquales sunt, erit triangulum ABD, Isosceles. Dico vtrumque angulorum ABD, ADB, duplum esse reliqui anguli A. Ducta enim recta CD, describatur circa triangulum ACD, circulus DCA Quoniam igitur rectangulum sub AB, BC, ęquale est quadrato rectę BD, & recta A B, secat circulum DCA, tanget recta BD, eundem circulum DCA, in D. Quare angulus BDC, ęqualis est angulo A, in alterno segmento CAD. Addito igitur cõmuni CDA, erit totus angulus ADB, ęqualis duobus angulis CAD, CDA: Sed his eisdem æqualis est etiam angulus externus BCD; angulus ergo BC D, ęqualis erit angulo ADB, hoc est, angulo ABD, cũ ABD, ADB,

ęqua-

ęquales ſint, ac propterea re-
ctę CD,BD,ęquales erunt: Eſt
autem BD,ęqualis poſita rectę
AC. Igitur & CD, ipſi CA, æ-
qualis erit; ac propterea an-
guli CAD,CDA,ęquales. *A*ngu-
lus igitur ADB, qui ęqualis oſ-
tẽſus eſt duobus angulis CAD,
GD*A*, duplus erit alterius eo-
rum, anguli nimirum *A*. Quare
& angulus ABD, duplus erit
eiuſdem anguli *A* Iſoſceles
ergo triangulum conſtituimus,
habens,&c. Quod erat efficien
dum.

PROBLEMA XI.

PROPOSITIO XI.

In dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

SIt in dato circulo ABCDE, inſcribendum pentagonũ ęquilaterum,& ęquiangulum. Conſtruatur triangulum Iſoſceles F G H, ita vt vterque angulorum G,H, duplus ſit reliqui F & in circulo inſcribatur triangulum ACD, ęquiangulum triangulo FGH, & vterque angulorum ACD, ADC, bifariam diuidatur rectis CE,DB, atque rectę iungātur AB, BC, CD.DE.EA. Dico pentagonum ABCDE, in circulo dato inſcriptum, eſſe ęquilaterum, & æquian-

quiangulum. Cum enim vterque angulorum ACD, ADC, duplus sit anguli CAD, & diuisus bifariam; erunt quinque anguli ADB, BDC, CAD, DCE, ECA, æquales. Quare arcus AB, BC, CD, DE, EA, super quos ascenderunt, atque idcirco & rectæ AB, BC, CD, DE, EA, equales erunt. Æquilaterum est igitur pentagonum ABCDE. Rursus, quia arcus AB, ED, equales sũt; addito communi B C D, fient equales ABCD, EDCB. Anguli ergo AED, BAE dictis arcubus insistentes equales erunt. Eodem modo equales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Insistunt enim æqualibus arcubus, quorum singuli ex ternis arcubus equalibus componuntur. Æquiangulum est ergo pentagonum ABCDE. Quare cum & equila-

laterum esse sit ostensum inscriptum erit, dato circulo pętagonum ęquilaterum, & ęquiangulum. Quod faciendum erat.

PROBLEMA XII.

PROPOSITIO XII.

Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIt circa datum circulum ABCDE, describendum pentagonum ęquilaterum, & ęquiangulum. Inscribatur in eo pentagonum equilaterum, & ęquiangulum ABCDE, & ex centro F. ducantur rectę FA, FB, FC, FD, FE, ad quas ducantur perpendiculares GH, HI, IK, KL, LG, coeuntes in G, H, I,

I,K,L. Cum enim anguli GAB, GEA, duobus sint rectis minores, partes nimirum angulorũ rectorum FAG, FEG; coibunt rectę AG, EG, ad partes G, & sic de alijs. Et quia ipsę tangunt circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit descriptum pentagonum GHIKL, circa circulum; quod dico esse ęquilaterum, atque ęquiangulum. Ductus enim rectis FG, FH, FI,FK,FL, erunt quadrato rectę FH, ęqualia tam quadrata rectarum FA,AH, quam rectarum FB, BH. Quare quadrata rectarum FA,AH, ęqualia erũt quadratis rectarum F A, A H. Demptis igitur quadratis ęqualibus rectarum ęqualium F A, FB, remanebunt quadrata rectarum AH,BH, ęqualia; ideoque & rectę AH, BH, ęquales erunt. Quod etiam constat ex

coroll. 2. propos. 36. lib. 3. cum AH, BH, ex eodem puncto H, ducantur circulum tangentes in A, & B. Quoniam er o latera AF, FH, trianguli AFH, equalia sunt lateribus BF. FH, trianguli BFH. Est autem & basis AH, basi BH, equalis, vt ostensum est; erunt anguli AFH, BFH, equales. Igitur & anguli AHF, BHF. Duplus igitur est angulus AFB, anguli BFG, & angulus AHB, anguli BHF. Eodem modo ostendemus, angulum BFC, duplum esse anguli BFI, & angulum BIC. anguli BIF. Cum igitur anguli AFB, BFC, sint equales, quod insistant circumferentijs AB, BC, que equales sunt, cum à rectis equalibus subtendantur AB, BC; erunt & dimidij eorum BFH, BFI, equales. Quocirca cum duo anguli BFH, HBF, trianguli BFH,

BFH, ęquales sint duobus angulis BFI, IBF; trianguli IFB, & latus illis adiacens commune BF, erunt & latera BH, BI, æqualia, & anguli BHF, BIF, æquales. Dupla est ergo recta HI, rectę HB. Eademque ratione ostendemus GH, rectam duplam esse rectæ HA. Sunt autem ostensæ æquales H B, H A. Igitur & earum duplæ HI, HG ęquales erunt. Similiter demōstrabimus rectas IK, KL, L G, ęquales esse cuilibet rectarum HI HG. Æquilaterum ergo est pentagonum GHIKL. Rursus quoniam ostensum est, angulos BHF, BIF, ęquales esse, ac semisses angulorum B H A, BIC: erunt & eorum dupli BH A, BIC, ęquales: Eademque ratione anguli IKL, KLG, LGH ęquales erunt cuilibet angulorum BHA, BIC. Æquiangulum

igitur est pētagonum GHIKL. Quapropter cum, & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pētagonum ęquilaterum, & ęquiangulum. Quod efficiendum erat.

PROBLEMA XIII.

PROPOSITIO XIII.

In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribere.

SIt inscribendus circulus in dato pentagono ABCDE. Diuidantur duo eius anguli BAE, ABC, proximi bifariam rectis AF, BF, quę coeant in F. Cum enim ex scholio præcedentis propos. rectæ AF, BF, secent opposita latera CD, DE, bifa-

bifariam, necesse est, duas rectas AF, BF, se mutuo intra pentagonum secare, priusquam rectis CD, DE, occurrant. Connectantur deinde rectæ FC, ED, FE. Quoniam igitur latera AB, BF, trianguli ABF, æqualia sunt lateribus CB, BF, trianguli CBF: Sunt autem ex constructione, & anguli ipsis contenti æquales ABF, CBF; erunt bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum igitur anguli BAE, BCD, ponantur æquales, & BAF, dimidium sit anguli BAE, per constructionem; erit & BCF, dimidium anguli BCD. Diuisus est ergo angulus BCD, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos CDE, DEA, diuisos esse bifariã. Ducantur iam ex F, ad singula pentagoni latera perpendiculares FG, FH, FI, FK, FL. Quoniam

niam igitur duo anguli F G A, FAG, trianguli FAG, æquales sunt duobus angulis FLA, FAL, trianguli FAL, estque latus AF subtensum vni æqualium angulorum commune erunt & rectæ FG, FL, ęquales. Similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK, æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo FG, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam vero latera pentagoni circulum hunc tangūt, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo, quod angulos rectos faciant cum semidiametri FG FH, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

PRO-

PROBLEMA XIV.

PROPOSITIO XIV.

Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.

SIt circa pentagonum ABC DE æquilaterum, & æquiãgulum, circulus describendus. Diuisis duobus angulis BAE, ABC, bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F, intra pentagonũ, vt in antecedente propositione demonstratum est; & coniunctis rectis FC, FD, FE, ostendemus, vt in præcedenti problemate; reliquos etiam angulos BCD, CDE, DEA, sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter se æquales, quod toti anguli æquales po-

niam igitur duo anguli F G A, FAG, trianguli FAG, æquales sunt duobus angulis FLA, FAL, trianguli FAL, estque latus AF subtensum vni æqualium angulorum commune erunt & rectæ FG, FL, equales. Similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK, æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo FG, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam vero latera pentagoni circulum hunc tangũt, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo, quod angulos rectos faciant cum semidiametri FG FH, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

PRO-

PROBLEMA XIV.

PROPOSITIO XIV.

Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.

SIt circa pentagonum ABCDE æquilaterum, & æquiangulum, circulus describendus. Diuisis duobus angulis BAE, ABC, bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F, intra pentagonũ, vt in antecedente propositione demonstratum est; & coniunctis rectis FC, FD, FE, ostendemus, vt in præcedenti problemate; reliquos etiam angulos BCD, CDE, DEA, sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter se æquales, quod toti anguli æquales po-

ponantur. Quoniam igitur in triangulo AFB, duo anguli æquales ſunt FAB, FBA; erunt rectæ FA, FB, equales. Eademque ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet iſtarum equales. Quare circulus deſcriptus ex centro F, interuallo autem FA, tranſibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

PRO-

PROBLEMA XV.
PROPOSITIO XV.

In dato circulo hexagonum, & æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

SIt in dato circulo ABCDE F, cuius centrum G, inſcribendum hexagonum æquilaterum, & ęquiangulum. Ducta diametro AD, deſcribatur circulus ex centro D, interuallo vero DG, qui ſecet circulum datum in pũctis C, & E, è quibus per centrum G rectæ extendantur CF, EB. Si igitur cõnectantur rectę AB, BC, CD, DE, EF, FA, inſcriptum erit in dato circulo hexagonum ABC DEF; quod dico eſſe, & æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim recta GC, æqualis ſit rectę GD, & recta DC, æqualis eidem

eidem rectæ *D*G, ex definitione circuli; erunt & rectæ GC, *D*C, æquales inter se: Ideoque triangulum C*D*G, erit æquilaterum. Quare tres anguli CG *D*, GDC, *D*CG, æquales inter se erunt: qui cum æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CG*D*, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus *D*GE, tertia pars duorum rectorum. Sunt autem tres anguli CG*D*, *D*GE, EGF, æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoque pars erit duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli CG*D*, *D*GE, EGF, inter se æquales: quibus cum etiam æquales sint ad verticem anguli FGA, AGB, BGC, erunt sex anguli ad centrum G, æquales. Quare circumferentiæ, quibus insistunt, ac propterea rectæ A B, BC,

B,BC,CD,DE,EF,FA, æquales erunt. Quapropter equilaterum est hexagonum ABCDEF. Rursus quia circumferentia BC. æqualis est circumferentię AF; si addatur communis CDEF,erunt circumferentiæ BCDEF,AFEDC, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes BAF, ABC, ęquales erunt. Similiterque ostendemus, reliquos angulos BCD,CDE, DEF,EFA, æquales esse cuilibet istorum, quia nimirum quilibet insistit arcui composito ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot,quot latera continet figura inscripta, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes ęqualibus arcubus insistere. Quare æquiangulum quoque est hexagonum ABCDEF. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum

gulum descripsimus. Quod faciendnm erat.

PROBLEMA XVI.

PROPOSITIO XVI.

In dato circulo, quintideçognum & aquilaterum & aquiangulum describere.

SIt in dato circulo ABC, inscribendum. Quintidecagonum æquilaterum, & æquiãgulum. Constituto triangulo ęquilatero *D*, quod ex coroll. propos. 5. lib. 1. erit etiam æquiangulum inscribatur ei æquiangulum triangulum A*BC*, in dato circulo, quod etiam erit ęquilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. eruntque tres arcus AB, BC, CA ęquales, vel ꝑpter tres rectas *A*B, BC, CA, æquales, vel propter tres æquales

les angulos A,B,C,trianguli AB C. Qualium igitur partium æqualium quindecim est circũferentia tota ABC,talium quinque erit arcus AB, qui tertia pars totius circumferentiæ. Inscribatur rursus in dato circulo pentagonum ęquilaterũ, & ęquiangulum AEEGH, applicans vnum angulorum ad punctum A,eruntq; qninque arcus AE,EF,FG,GH,HA,æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim est tota circumferentia ABC, talium trium erit arcus AE, quinta pars existens totius circumferentię. Itaque cùm arcus AB, contineat tales partes quinq; & arcus AE, tres; continebit reliquus arcus EB, duas. Diuiso ergo arcu EB,bifariam in I. erit arcus BI,pars decimaquinta totius circumferentiæ. Quare

tur, & in eadem ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad vltimam se se habuerit.

Vel aliter. Sumptio extremorum, per subductionē mediorum.

18 Ordinata proportio est, cū fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem: fuerit etiam, vt consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

19 Perturbata autem proportio est, cum tribus positis magnitudinibus, & alijs, quę sint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita

in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: Vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secũdis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem

THEO-

THEOREMA I.

PROPOSITIO I.

Si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt, & omnes omnium.

SInt quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinum E,F. ęque multiplices. Dico magnitudines AB, CD, ſimul, tam eſſe multiplices magnitudinum E, F, ſimul, quam eſt multiplex AB, ipſius E, vel CD, ipſius F Cum enim AB, CD, ſint ęque multiplices ipſarum E,& F, ſi AB diuidatur in magnitudines A G,

GH,HB,ipſi E,ęquales, & CD. quoque in magnitudines C I, IK,KD,ipſi F,æquales; (Diuidi autem poterit quælibet in par tes omnino ęquales, cum A,B, C,D,E,F ęque multiplices, atq; ideo toties E,in AB, perfectè contineatur, quoties F,in CD, vt ex ijs,quæ in defin. 2, huius lib. ſcripſimus, conſtat) erunt magnitudines AG GH,HB, tot numero, quot ſunt magnitudines CI,IK,KD. Quoniam vero AG,& E, ęquales inter ſe ſunt, ſi ipſis addantur ęquales CI,& F, erunt AG,CI,ſimul,æquales ipſi E,& F,ſimul. Eodem modo erunt GH & IK,ſimul ęquales ipſis E,& F,ſimul; Necnon HB, & KD eiſdem E, & F. Quoties igitur E,in AB, vel F,in CD,cõtinetur toties,& E, F, ſimul, in AB,CD, ſimul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex eſt

eſt AB, ipſius E, tam ſunt multiplices AB,CD, ſimul, ipſarum E,& F,ſimul, vt conſtat ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. ſcripſimus. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines quotcunq; magnitudinum,&c. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA II.

PROPOSITIO II.

Si prima ſecũdæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ: fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex, atque ſexta quartæ;erit & compoſita prima cum quinta, ſecundæ æque multiplex, atque tertia cum ſexta, quartæ.

SIt magnitudo prima AB, tam multiplex ſecundæ C

quam est multiplex DE, tertia, quartæ F. Rursus, tam sit multiplex BG, quinta ipsius C, secundæ, quam multiplex est E H, sexta ipsius F, quartæ, Dico AB, primam cum BG, quinta compositam, tam multiplicem esse secundæ C, quam multiplex esse DE, tertia composita cum sexta EH, ipsius F, quartæ. Cum enim AB, sint eque multiplices ipsarum C, F, erunt in AB, tot magnitudines ipsi C, æquales; quot sunt in DE, æquales ipsi F. Eadem ratione erunt, & in BG, tot æquales ipsi C quot sunt in EH, equales ipsi F. Si igitur equalibus multitudinibus AB, DE, addantur equales multitudines B G, E H, erunt tote multitudines AG, DH, equales. Quare toties comprehenditur C, in AG quoties F, in DH. Quod erat ostendendum.

THEO-

THEOREMA III.

PROPOSITIO III.

Si sit prima secunda æque multiplex, atque tertia quarta; sumantur autem æque multiplices prima, & tertia: Erit & ex æquo, sumptarum vtraque vtriusque æque multiplex, altera quidem secunda, altera autem quarta.

SIt prima magnitudo A, tam multiplex secundæ B, quã multiplex est C, tertia quartæ D; sumanturque E, F, æque multiplices primæ, & tertiæ A, & C Dico ex ęquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secundæ, quam est F, ipsius D, quartæ. Nam cum E, & F, sint ęque multiplices ipsarum A, & C; si

distribuantur E,& F,in magnitudines ipsis A, & C, æquales, vt in EG,GH,HI, & FK,KL, LM, erunt tot partes in E,ęquales ipsi A, quot sunt in F, æquales ipsi C. Quoniam vero EG,FK,ęquales sunt ipsis A, & C; sunt autem A, & C, æque multiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi; Erunt & E G, FK, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erũt GH, KL. Item HI,LM, æque multiplices earundem B, & D, erunt igitur & compositæ ex EG, GH, equè multiplices ipsius B,vt compositæ ex FK,KL ipsius C, ergo & pariter composita ex EH,HI, & ex FL,LM, & eadem erit ratio si plures sint partes. Quod ostendendum erat.

THEO-

THEOREMA IV.

PROPOSITIO IV.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ, & tertiæ, ad æque multiplices secundæ, & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

SIt proportio *A*, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item secundæ B, & quartæ D, æque multiplices G & H, iuxta quamuis multiplicationem; siue E, F, ita multiplices sint ipsarum *A*, C, sicut G, H, ipsarum B, D, siue non.

His positis, constat ex defin. 6. huius lib. si E, deficit à G, etiã F, deficere ab H. Et si E, ęqualis est ipsi G, etiam F, ęqualem esse ipsi H. Et denique si E excedit G, etiam F excedere H. Alioquin non esset, per defin. 6 eadem proportio *A*, ad *B*, quæ C, ad D, si earum æque multiplicia non semper ita se haberent. Dico iam, multiplicia primæ, ac tertiæ non solum vnà deficere à multiplicibus secundæ, ac quartæ, aut vnà æqualia esse, aut vnà excedere, vt diximus, sed eandem quoque inter se proportionem habere. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æque multiplices; Item L, M, ęquè multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius *A*, secundæ, quam F, tertii ipsius *C*, quartæ; sumptæ sunt autem

autem & I, K, æque multiplices ipſarum E, F, primæ, ac tertiæ: Erunt quoque ex ęquo I,K, ęque multiplices ipſarum A,C,ſecundæ, & quartæ. Eadem ratione erunt L,M, ipſarum B,D,æque multiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad B,ſecundam, quæ C, tertię ad D,quartam, oſtenſæque ſunt I,K, ęque multiplices primæ,& tertiæ A,C.Item L.M, æque multiplices ſecundæ, & quartæ B,D,iſtę quæ illorum ſunt æque multiplices vna deficient,vel excedent,vel ęquales erunt, ergo ita ſe habebit E,ad F,quorum IK, ſunt æque multiplices,vt G,ad H, quorū LM, ſunt ęque multiplices. Quod erat oſtendendum.

THEO-

THEOREMA V.

PROPOSITIO V.

Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

ITa multiplex sit tota AB, totius CD, vt est multiplex AE, ablata ablatę CF. Dico reliquam EB, ita esse multiplicem reliquæ FD, vt est tota AB, totius CD. Ponatur enim EB, ita multiplex cuiuspiam magnitudinis, videlicet ipsius GC, vt est AE, multiplex ipsius CF, vel tota AB, totius CD. Quoniam igitur AE, EB, æque sunt multiplices ipsarum CF, GC; erit tota AB, totius GF, ita multiplex,

vt

vt AE,ipsius CF,hoc est omnes omnium,vt vna vnius:Sed tam multiplex etiam ponitur AB, ipsius CD , quam est multiplex AE,ipsius CF.Igitur AB,tam est multiplex ipsius GF,quam mul tiplex est ipsius CD; atque id-circo æquales sunt GF , CD . Ablata igitur communi CF. æquales erunt GC. FD. Tam multiplex igitur erit EB, ipsius FD, quam multiplex est ipsius GC. Sed ita multiplex posita fuit EB,ipsius GC,vt AE, ipsius CF, hoc est,vt tota AB, totius CD. Quare tam multiplex est reliqua EB , reliquæ FD, quam est tota AB,totius CD.quod est propositum .

THEO-

THEOREMA VI.

PROPOSITIO VI.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, & detractæ quadam ſint earundem æque multiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æque ipſarum multiplices.

SInt magnitudines AB, CD, ęque multiplices ipſarum E,F,& detractæ AG,CH,earundem E, F, ęque multiplices. Dico reliquas GB,HD, aut eſse æquales eiſdem EF, aut certè earundem ęque multiplices. Quoniam AB,CD,ſunt ipſarum E,F, æque multiplices;erunt in AB,tot magnitudines æquales ipſi E,quot ſunt magnitudines

in

in CD, æquales ipsi F. Rursus quia AG, CH, earundem E, F æque multiplices sunt; erunt quoque in AG, tot magnitudines ipsi E, ęquales, quot sunt magnitudines in CH, ipsi F, ęquales. Si igitur ex ęqualibus multidinibus AB, CD, demantur multitudines æquales AG, CH; remanebunt multitudines GB, HD, æquales. Quare toties continebitur E, in GB, quoties F, continetur in HD; ac proinde si GB, equalis sit ipsi E, erit quoq; HD, ipsi F, ęqualis: Si autem GB, multiplex sit ipsius E: erit ita multiplex HD, ipsius F, vt GB, multiplex est ipsius E. quandoquidem toties E, in GB: continetur, quoties F, in HD, existit, vt ostensum est.

THEO-

THEOREMA VII.

PROPOSITIO VII.

Aequales ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

SInt duę magnitudines A, B, æquales inter se, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C. Item C, vicissim ad A, & B, eãdem quoque proportionem habere. Sumantur D, E, æque multiplices ipsarum ęqualium A, B, eruntque D, E, æquales inter se. Capiatur rursus F, vtcunque multiplex ipsius C. Quoniam igitur D, E, ęquales sunt fit vt vtraq; vel minor fit, quam F, vel æqualis, vel maior, iuxta quamcunque multipli-

plicationem ea multiplicia sumantur. Quare cum D,E, æque multiplices primæ A.& B, tertiæ,minores sint ipsa F,multiplice secundę, & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinum,&c.) vel æquales,vel maiores;erit ea proportio primæ A, ad C, secundam, que tertię B, ad C, quartam.

Eodem pacto ostendemus F, vel minorem esse vtraque D, E,vel vtrique æqualem,vel maiorem. Igitur cum F,multiplex primæ,& tertiæ C,vna deficiat à D, & E, æque multiplicibus secundæ A,& quartæ B, vel vna æqualis sit, vel maior; Erit quoque ea proportio primæ C, ad secundam A,quæ tertiæ C, ad quartam B;quod est propositum. Posset breuius secunda hæc pars ostendi per coroll. 4. propos. ex inuersa ratione.

Cum

Cum enim ostensum iam sit,esse A,ad C,vt B,ad C, erit conuertendo C, ad A,vt C, ad B, Aequales ergo ad eandem,eādem habent rationem . Et eadem ad æquales , quod erat demonstrandum .

THEOREMA VIII.

PROPOSITIO VIII.

In æqualium magnitudinum maior ad eandem,maiorem rationem habet , quam minor : Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem .

SInt magnitudines inęquales,AB,maior,& C,minor , Tertia autem quælibet D.Dico proportionem AB,ad D, maiorem esse proportione C, ad D. At

At è conuerso, maiorem esse proportionem D,ad C, quam D,ad AB. Intelligatur enim in AB,magnitudine maiore, magnitudo AE, æqualis minori C, vt sit reliqua EB. Vtraq; deinde EB,AE, ęqualiter multiplicetur,hac lege,vt GF, multiplex ipsius EB, maior quidem sit,quam D,At HG multiplex ipsius AE,non sit minor eadem D,sed vel maior, vel ęqualis. Quoniam igitur duæ FG, GH, æque multiplices sunt duarum BE,EA; erit & tota FH ita mul tiplex totius AB,vt HG, ipsius AE,hoc est,ipsius C,cum æquales sint positæ C,& AE. Capiatur quoque ipsius D,multiplex IK,quæ proximè maior sit,quã HG,Abscissa ergo LK, quę ęqualis; sit ipsi D, non erit IL, maior,quam HG,(alias IK, nõ esset multiplex ipsius D,proxime

me maior quam HG,sed & IL, maior quoque esset quam HG. Quod si IK, dupla sit ipsius D, perspicuum est,IL, non esse maiorem,quam HG, cum HG, posita sit non minor quam D, hoc est, quàm IL,) & idcirco HG, erit vel ęqualis ipsi IL,vel maior. Et quia FG, maior est posita quam D:LK,vero ęqualis eidem D; erit quoque FG, maior quam LK. Cum ergo HG,non minor sit quam IL, vt demonstratum est, sed vel æqualis,vel maior,erit tota FH, maior quam IK. Itaque cum FH,HG, sint æque multiplices primę AB, & tertiæ C, atque IK, multiplex ipsius D,quę instar est secundæ,& quartæ: sit autem FH, multiplex primæ, maior quam IK, multiplex secundæ; At HG, multiplex tertiæ,non sit maior,quã IK, multiplex

tiplex quartæ, immo minor, ex hypothesi (sumpta enim est IK, multiplex ipsius D, maior quam HG,) erit maior proportio AB, primæ ad D, secundam, quam C, tertię ad D, quartam.

Quoniam vero è contrario IK, multiplex primę D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia: At C, secunda & AB, quarta) maior est quam HG, multiplex secundæ C; At IK, multiplex tertiæ D, maior non est, quam FH, multiplex quartæ AB immo minor, cum FH, maior sit, quam IK, vt ostensum est, erit maior proportio D, primę ad C, secundam, quam D, tertiæ ad AB, quartam: quod est propositum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat ostendendum.

THEO-

THEOREMA IX.

PROPOSITIO IX.

Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoq; sunt inter se æquales.

Habeant primum A, & B, eanden, rationem ad C; Dico A,& B,esse inter se ęquales. Sit enim, si fieri potest,altera,nempe A,maior,& B, minor,erit igitur maior proportio A,maioris ad C, quam B,minoris ad eandem C; quod est cõtra hypothesim. Non ergo inæquales sunt A,& B, sed ęquales. Habeat deinde C,eandem proportionem ad A,& B: Dico rursus A,& B, esse ęquales.

les. Nam si altera, nempe A, esset maior,& B minor; haberet C, ad B, minorem, maioré proportionem, quam ad A, maiorem; quod est contra hypothesin. Non igitur maior erit A, quam B, sed ęqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habẽt rationem, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOREMA X.

PROPOSITIO X.

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est; Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

HAbeat primum *A*, ad C, maiorem proportionem,

 quam

quam *B*, ad eandem C. *Dico* A, maiorem esse, quam *B*:Si enim A, foret ipsi *B*,ęqualis,haberent A, & B,eandem proportionem ad C: Si autem A, minor esset, quam B, haberet B, maior ad C,proportionem maiorem,quàm A, minor ad eandem C,quod est contra hypothesin. Non est igitur A, ęqualis vel minor quam B, sed maior. Habeat secundo C, ad B, maiorem proportionem, quam ad *A*. Dico *B*, minorem esse quam A. Non enim æqualis erit *B*, ipsi A: alioqui haberet C, eandem proportionem ad A,& B; quod est contra hypothesin. Neque vero B, maior erit quam *A*, alias haberet C, ad minorem *A*, maiorem proportionem quam ad B,maiorem: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B

quam

quàm A, quod eſt propoſitum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XI.

PROPOSITIO XI.

Quæ eidem ſunt eadem rationes, & inter ſe ſunt eadem.

SInt proportiones *A*, ad B, & C, ad D, eędem proportioni E, ad F. Dico & proportiones *A*, ad *B*, & C, ad D, eaſdem eſſe inter ſe, ſecundum definitionem 6. Sumãtur enim ad omnes antecedentes A, C, E ęque multiplices quæcunque G, H, I, & ad omnes conſequẽtes *B*, D, F, aliæ quæcunque ęque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur eſſe *A*, pri-

ma ad B, secundam vt E, tertiam ad F, quartam; sit vt si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplice quartæ; Et si G, ęqualis est ipsi K, vel maior, ęqualis quoque sit I; ipsi M, vel maior: Sed (vt eodem modo ostendetur) si I, minor est, quam M, vel ęqualis, vel maior, est quoque H, minor quam L, vel ęqualis, vel maior, propterea, quod ponitur esse E, prima ad F, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primæ *A*, deficit à K, multiplice secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartę D. Et si G, æqualis est, vel maior quā K etiā H æqualis erit, vel maior quā L. Idēq; ostendetur accidere in quibuscunque alijs
ęque

ęque multiplicibus. Quapropter erit *A*, prima ad B, ſecundam, vt C. tertia ad D, quartā. Quæ igitur eidem ſunt eędem rationes, & inter ſe ſunt eędē. Quod erat oſtendendum.

THEOREMA XII.
PROPOSITIO XII.

Si ſint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum ſe habuerit vna antecedentiū ad vnam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

QVod in propoſ. 1. de Proportione multiplici demonſtrauit, oſtendit hic de omni genere proportionis, etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines *A*, *B*, C, D, E, F, propor-

tionales, hoc eſt, ſit A, ad *B*, vt C, ad D, & E, ad F. Dico vt eſt vna antecedentium ad vnam conſequentium; nimirum A, ad B, ita eſſe omnes antecedentes ſimul A, C, E, ad omnes conſequentes ſimul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium, & K, L, M, ęque multiplicibus conſequentium; erunt omnes G, H, I, ſimul omnium A, C, E, ſimul ita multiplices, vt vna vnius, nempe vt G, ipſius A; & omnes K, L, M ſimul omnium B, D, F, ſimul ita multiplices, vt vna vnius, nimirum vt K, ipſius B. Quoniam vero ponitur eſſe *A*, prima ad *B*, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam, ſit vt ſi G, multiplex primę deficit à K, multiplice ſecundę, deficiat quoque H, multiplex tertię ab

L,

L, multiplice quartę, & I, ab M: Et si G, ęqualis est ipsi K, vel maior, ęqualis quoque sit H, ipsi L, & I, ipsi M, vel maior. Ac proinde si G, minor est, vel æqualis, vel maior quam K, & omnes G, H, I, simul omnibus K, L, M, simul minores sint, vel æquales, vel maiores. Quocirca vt est A, prima ad B, secundam ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si sint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOREMA XIII.

PROPOSITIO XIII.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem rationẽ habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

SIt prima *A*, ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam: ſit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quam E, quintæ ad F, ſextam. Dico, & proportionem A, primæ ad B, ſecundam eſſe maiorem quam B, quintæ ad F, ſextam, ſecundum definitionem 8. hoc eſt, ſumptis æque multiplicibus

ipſa-

ipsarum *A*, E; item æque multiplicibus ipsarum B, F, contingere posse, vt multiplex ipsius A, excedat multiplicem ipsius B, at multiplex ipsius E, multiplicem ipsius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, ęque multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, ęque multiplicibns cõsequentium, cum sit *A*, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam: fit vt si G, multiplex primæ excesserit K, multiplicem secundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipsam L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipsam L, non necessario I, excedit ipsam M, sed æqualis aliquando erit, vel minor; quod maior ponatur proportio C, prima ad *D*, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartam: igitur si G, excedit K, non necessario I,

excedit M, Maior est ergo proportio A, primę ad B, secundam, quam E, tertię ad F, quartam. Quamobrem si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod ostendendum erat.

THEOREMA XIV.

PROPOSITIO XIV.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Prima vero quam tertia maior fuerit, erit & secunda maior quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si vero minor & minor erit.

SIt enim A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quar-

quartam. Dico si A, maior fuerit quam C, fore quoque B, maiorem quam *D*. Quod si A, ęqualis fuerit ipsi C, ęqualem quoque esse B. ipsi D: Si denique A, minor fuerit quam C, minorem quoque esse B, ipsa D. Sit primum A, maior quam C. eritque propterea proportio *A*, maioris ad B, maior quã C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad *B*, quartam; Proportio autem A, tertiæ ad *B*, quartam, maior est, vt ostédimus, quam C, quintæ ad *B*, sextam: Maior quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam. Minor est ergo D, quam B; Ideoque *B*, maior erit quam *D*. Quod est propositum.

Sit deinde A, æqualis ipsi *C*,

eritque idcirco *A*,ad B , vt C, ad B, Quoniam igitur proportiones C,ad D,& C,ad *B*, eædē sunt proportioni A,ad B,erunt quoque inter se eędem proportiones C,ad D,& C,ad B; Ideoque ęquales erunt B , & D. Quod est propositum .

Sit tertio A,minor, quam C: eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B , quam A; minoris ad B,eandem. Quoniā igitur est C,prima ad D, secundam,vt A,tertia ad B. quartā; est autem proportio A, tertię ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, sextam ; Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam , quam C, quintæ ad B,sextam ; Ideoque B, minor erit quā D, quod est propositum . Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum . THEO-

THEOREMA XV.

PROPOSITIO XV.

Partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

SInt partium A, & B, eque multiplices CD, & EF. Dico ita esse CD, ad EF, vt A, ad *B*. Cum enim C*D*, & EF, sint eque multiplices ipsarum *A*,& B, continebitur A toties in C D, quoties *B*, in EF Diuidatur ergo C*D* in partes CG,GH,HD æquales ipsi A, & EF,in partes EI,IK,KF, æquales ipsi B; eritque CG,ad EI,vt A,ad B, quod CG,& *A*, equales inter se sint; necnon EI, & B. Eadem ratione erit GH,ad IK, & H*D*,ad K F.

F, vt A,ad B, ideoque CG,GH, HD, ac EI,IK,KF, eandem habebunt proportionem. Quocirca vt CG,ad EI, hoc eſt, vt A,ad B, ita erit CD,ad EF.nempe omnes CG, GH, HD, ſimul ad omnes E I, I K, K F, ſimul quod eſt propoſitum. Partes itaque cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XVI.

PROPOSITIO XVI.

Sc quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt.

HIC demonſtratur Alterna, ſiue Permutata proportio, ſeu ratio, quæ defin. 12 explicata eſt. Sit enim A ad B vt

vt C ad D. Dico viciſſim, ſeu permutando, eſſe quoque *A*, ad *C*, vt B, ad D. Sumantur enim ipſarum A, B, primæ, ac ſecundę, ęque multiplices E, F. Item ipſarum C, D, tertiæ, & quartæ æque multiplices G, H; eritque E, ad F, vt A, ad B; cum E, & F, ſint pariter multiplices partiũ A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & *C*, ad D ſint eędem proportioni A, ad B erunt & ipſę inter ſe eędem. Rurſus, quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eędem ſunt proportioni C, ad D; erunt & ipſæ eędem inter ſe; hęc eſt, vt eſt E, prima ad F, ſecundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. Quare ſi E, prima maior eſt quã G, tertia, vel ęqualis, vel minor, erit quoque F, ſecunda maior quam H, quarta, vel æqualis,

vel

vel minor, in quacunque multiplicatione accepta sint ęque multiplicia E,F, & ęque multiplicia G,H. Est igitur *A*, prima ad C, secundam, vt B, tertiam ad D, quartam (cum E, & F, sint ęque multiplices primæ A, ac tertię B; At G, & H, ęque multiplices C, secundæ, & D, quartæ, & illæ ab his vna deficiãt, vel vna ęquales sint, vel vna excedant, &c.) Quod est propositum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt. Quod ostendendum erat.

THEO-

THEOREMA XVII.

PROPOSITIO XVII.

Si compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.

HOc loco demonstrat Euclides diuisionem rationis, quam defin. 15. explicauit. Sint enim compositæ magnitudines AB, CB, & DE, FE, proportionales, hoc est, sit AB, ad CB, vt DE, ad FE. Dico & diuisas easdẽ proportionales esse, hoc est, vt est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE, in eo sensu, quẽ definit. 6. exposuimus. Ipsarũ enim AC, CB, DF, FE, ęque multiplices capiantur eodem ordine GH, HI, KL, LM: eritque GI ita multiplex ipsius AB, vt est

GH

GH, ipſius AC, hoc eſt, vt KL, ipſius DF. Sed vt eſt multiplex KL, ipſius DF, ita quoque multiplex eſt KM, ipſius DE; eque multiplices; ergo ſunt GI, KM, ipſarum AB, DE. Capiantur rurſus I N, M O, eque multiplices ipſarum CB, FE. Quoniam igitur ſic eſt multiplex HI, prima ſecunde CB, vt LM, tertia quartæ FE. Item tam eſt multiplex IN, quinta ſecundæ CB, quam multiplex eſt MO, ſexta quartę FE; erit & HN, ſic multiplex ſecundæ CB, vt LO, multiplex eſt quartę FE. Itaque cum ſit AB, prima ad CB, ſecundam, vt DE, tertia ad FE, quartam; ſumpteque ſint eque multiplices GI, KM, primę ac tertię AB, DE: Item ſecundę, & quartę CE, FE, eque multiplices HN, LO ſit vt ſi GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice

ſe-

ſecundę CB, etiam KM, multiplex tertiæ *DE*, deficiat ab LO, multiplice quartæ FE; & ſi æqualis, ęqualis; & ſi excedit, excedat. Quod ſi deficiat tam GI, ab HN, quam KM, ab LO, ablatis communibus HI, LM, deficiet quoque GH, ab IN, & KL. ab MO. Et ſi G I, æqualis fuerit ipſi HN, & KM, ipſi LO, ablatis communibus HI, IM, erit & GH, ęqualis ipſi IN, & KL, ipſi MO. Et ſi denique GI, exceſſerit ipſam HN, & KM, ipſam LO, ablatis communibus HI, LM, excedet quoque GH, ipſam IN, & KL, ipſam MO. Quamobrem cum GH, KL, ſumptę ſint æque multiplices primæ *A* C, & tertiæ *D F*: Item IN, MO, æque multiplices ſecundę C*B*, & quartæ FE, oſtenſumque ſit, (in quacunque multiplicatione illę ęque multi-

ti-

tiplices fuerint acceptę) ęque multiplices primę, & tertię ab ęque multiplicibus secundæ, & quartæ, vel vna deficere, vel ęquales esse, vel vna excedere; Erit A C, prima ad C B, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam, quod est propositum. Si compositæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

THEOREMA XVIII.

PROPOSITIO XVIII.

Si diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.

DEmonstrat hoc loco Euclides compositionem rationis, quam defin. 14. descripsit. Sint enim diuisæ magnitudi-

tudines AB, BC, & DE, EF, proportionales, hoc est, AB, ad BC vt DE, ad EF. Dico & compositas proportionales esse, hoc est, vt est AC, ad BC, ita esse DF, ad EF. Si enim non est, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, habebit DF ad aliquam magnitudinem minorem ipsa EF, vel maiorem, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Habeat primum DF, ad GF, minorem ipsa EF, si fieri potest, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur est, vt AC, ad BC, ita DF, ad GF; erit diuidẽdo quoque, vt AB ad BC, ita DG ad GF: Sed vt AB, ad BC, ita posita quoque est DE, ad EF. Igitur erit etiam, vt DG prima ad GF, secundam, ita DE tertia ad EF, quartam. Cum ergo DG, prima maior sit, quam DE, tertia; erit quoque GF, secun-

cunda maior, quam EF, quartá, pars quam totum. Quod est absurdum.

Habeat deinde, si fieri potest DF, ad HF, maiorem ipsa EF, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Qnoniam igitur est, vt AC, ad BC, ita DF, ad HF; erit diuidendo quoque vt AB, ad BC, ita DH, ad HE. Sed vt AB, ad BC, ita posita etiam est DE, ad EF. Igitur erit quoque, vt DH, prima ad HE, secũdam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DH, prima minor sit quam DF, tertia, fuerit quoque HF, secunda minor quam EF, quarta, totum quam pars, quod est absurdum. Non igitur habebit DF ad minorem, ipsa EF, aut ad maiorem, eandẽ proportionem, quam AC, habet ad BC. Ergo DF, ad ipsam EF erit, vt AC, ad BC, quod est

pro-

propoſitum. Itaque ſi diuiſæ magnitudines ſint proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOREMA XIX.

PROPOSITIO XIX.

Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerit ad ablatum, & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, ſe habebit.

QVod in propoſ. 5. demonſtratum eſt de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonſtratur. Sit enim tota AB, ad totam CD, vt ablata A E, ad ablatam CF. Dico & reliquam EB eſſe ad reliquam FD, vt eſt tota

tota AB ad totam CD Cum enim sit A*B*, ad CD, vt AE, ad CF: erit & permutando AB, ad AE, vt C*D*, ad CF. *D*iuidendo ergo erit EB, ad *A*E, vt FD, ad CF. Quare permutando rursus erit EB, ad F*D*, vt AE, ad CF, hoc est, vt tota AB, ad totam CD, cum posita sit A*B*, ad CD, vt AE, ad CF. Si igitur quemadmodum totum ad totum. &c. Quod demonstrandum erat.

THEO-

THEOREMA XX.

PROPOSITIO XX.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quã tertia maior fuerit, erit et quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ, sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SInt tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F, sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem F, sexta. Cum enim A, maior sit quam C, erit maior

N pro-

proportio A, ad B, quam C, ad B. Eſt autem vt A ad B, ita ad D, ad E. Maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B. *A*t vt C, ad B, ita eſt F, ad E. (Cum enim ſit B, ad C, vt E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E.) Maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E. Quare *D*, maior erit, quam F. Quod eſt propoſitum.

Sit deinde A, ęqualis ipſi *C*. Dico, & *D*, æqualem eſſe ipſi F. Cum enim A, ſit ipſi C, æqualis; erit *A*, ad B, vt C, ad B. Eſt autem vt A, ad B, ita D, ad E, igitur erit & D, ad E, vt C, ad *B*: *A*t vt C, ad B, ita eſt *F*, ad *E*, per inuerſam rationem, vt prius. Quare erit quoque D, ad F, vt F, ad *E*; Ideoque ęquales erunt D, & E. Quod eſt propoſitum.

Sit tertio A, minor quam C.

Dico

Dico & D, minorem esse, quam F. Cum enim A, minor sit, quã C, erit minor proportio A, ad B quam C, ad B. Sed vt A, ad B, ita est D, ad E. Minor ergo quoque proportio est D, ad E, quã C, ad B. Est autem conuertendo, vt prius, vt C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor est quoque proportio D, ad E, quam F, ad E; proptereaq; D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c.

THEOREMA XXI.

PROPOSITIO XXI.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earũ proportio; ex æquo autem prima, quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SInt tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E. Sit autem primũ

A,

A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta F. Cum enim *A*, maior sit quam C, erit maior proportio *A*, ad B, quam C, ad B. Est autem, vt *A*, ad B, ita E, ad F. Maior ergo quoque proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero vt *E*, ad C, ita est D, ad E, erit conuertendo vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D. Ideoque maior erit D, quam F. Quod est propositum.

Sit deinde A, ipsi C, æqualis. Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cum enim A, sit equalis ipsi C, erit A, ad B, vt C, ad B: Sed vt A, ad B, ita est E, ad F. Igitur erit vt C, ad B, ita E, ad *F*: Est autem ex inuersa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoq;

vt E,ad F, ita E, ad D; atque idcirco D, ipsi F, æqualis erit. Quod est propositum.

Sit tertio A, minor, quam C. Dico, & D, minorem esse quam F. Cum enim A, sit minor quã C, erit minor proportio A,ad B quàm C, ad B: Vt autem A,ad B, ita est E, ad F. Minor est ergo proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, vt ante, ex inuersa ratione, vt est C,ad B, ita E,ad D; erit quoque minor proportio E,ad F, quam F, ad D; ac propterea D, minor erit quam F, quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat.

THEO-

THEOREMA XXII.

PROPOSITIO XXII.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ bina in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

IAm hic demonstrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex ęqualitate, quando proportio est ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F: sitque *A*, ad B, vt D, ad E. & *B*, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate esse A, ad C, vt D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, D, æque multiplicibus G, H. Item ipsarum

B, E, I, K, & ipsarum C, F, L, M; cum sit A, prima ad *B*, secundam, vt D, tertia ad E, quartā, erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem secundæ B; vt H, multiplex tertiæ D ad K, multiplicem quartæ E. Eadem ratione, cum sit *B*, prima ad C, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem secundæ C, vt K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione sumuntur; fit vt si G, prima superat tertiam L, superet necessario quoque H, quarta sextam M: Et si æqualis, equalis; Et si deficit, deficiat. Itaque cum G, H, æque multiplices primæ *A*, & tertiæ D, vel deficiant vna ab L, M,

æque

æque-multiplicibus secundę C & quartæ F, vel vna æquales sint, vel vna excedant: in quacunque multiplicatione sumpta sint ea multiplicia, erit *A*, prima ad C, secundam vt D, tertia ad F, quartam. Quod est propositum.

*D*einde sint plures magnitudines tribus; ita vt sit etiam C, ad N, vt F, ad O. *D*ico adhuc esse, vt A, ad N, ita D, ad O. Cũ enim iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt D, ad F: ponatur autem *C*, ad N, vt *F*, ad O, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per qua-

ctuor; ſicut id in quatuor demonſtratum fuit per tres; & ſic de pluribus. Itaque ſi ſint quotcunq; magnitudines, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOREMA XXIII

PROPOSITIO XXIII.

Si ſint tres magnitudines, aliaque ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur: fuerit autem perturbata earũ proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEmonſtratur hic ratio ex æqualitate, quando proportio eſt perturbata. Sint enim tres magnitudines A,B,C, & aliæ tres D, E, F, ſitque perturbata earum proportio, hoc eſt, ſit vt A,ad B. ita E,ad F; & vt

vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate esse, vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, B, D, æquemultiplicibus G, H, I; Item ipsarum C, E, F, ęquemultiplicibus K,L,M. Erit vt A, ad B, ita G, ad I, cum G, I, sint ipsarum A,B, æquemultiplices; At vt A, ad B, ita est E, ad F; Igitur vt G ad I, ita quoque est E, ad F; Sed vt E, ad F, ita est, quoque K, ad M; quod K,M, sint ipsarũ E F, æquemultiplices. Igitur erit quoq; vt G, ad I, ita K, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; erit quoque vt I, multiplex primę B, ad L, multiplicem secundæ C, ita H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicem quartæ E. Quia igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ

in eadem ratione ſumuntur, eſtq; earum proportio perturbata; cum oſtenſum ſit eſſe vt G,ad I,ita K,ad M; Et vt H,ad K,ita I, ad L, fit vt ſi G, prima ſuperat tertiā L, ſuperat quoque quarta H, ſextam M; & ſi ęqualis, ęqualis; & ſi deficit, deficiat. Itaq; cum G,& H, æquemultiplices primæ A,& tertiæ D,ab L,& M,æquemultiplicibus ſecundæ C, & quartæ F, vel vna deficiant, vel vna æquales ſint,vel vna excedant; erit vt A,prima ad C, ſecundā, ita D, tertia ad F, quartam, quod eſt propoſitum. Itaque ſi ſint tres magnitudines, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEO-

THEOREMA XXIV.

PROPOSITIO XXIV.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam; Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

QVod propositione 24. demonstrauit Euclides de sola proportione multiplici, demonstrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim AB, prima ad C, secundam, vt DE, tertia ad F, quartam; Item BC, quinta ad

ad C, secundam; vt EH, sexta ad F, quartam. Dico ita esse AG, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, vt est D H, composita ex tertia, & sexta, ad quartam F. Cum enim sit vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est AB, ad C, vt DE, ad F, & C, ad BG, vt F, ad FH; erit ex æquali AB, ad BG, vt DE, ad EH. Componendo igitur erit vt tota AG, ad BC, ita tota DH, ad EH. Itaque cum rursus sit AG ad BG, vt DH, ad EH, & BG, ad C, vt EH, ad F: erit ex æquali AG, ad C, vt DH, ad F, quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XXV.

PROPOSITIO XXV.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima, & minima reliquis duobus maiores erunt.

SIt enim AB,ad CD,vt E, ad F, sitque AB,omnium maxima & F,minima. Dico duas AB, & F, simul esse maiores duabus CD,& E,simul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, ęqualis ipsi E; & ex CD,alia CH, ęqualis ipsi E. Erit igitur AG,ad CH, vt E,ad F, hoc est, vt AB, ad CD. Quare cum sit tota AB,ad totam CD,vt ablata AG, ad ablatam CH: erit quoque vt tota AB, ad totam CD, ita reliqua GB, ad reliquã HD:

HD: Est autem *A* B, (cum sit omnium maxima) maior quam CD. Igitur & G B, maior erit quam HD. Quoniam vero AG, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & CH, nimirum F ipsi AG, & CH, ipsi E, fient AG, & F, simul æquales ipsis E, & CH, simul. *A*dditis igitur inæqualibus GB, & HD, fient *A*B, & F, simul maiores quam E, & C*D*, simul cum GB, sit maior quam HD; quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA XXVI.

PROPOSITIO XXVI.

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

HAbeat enim *A*, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad *A*, minorem esse proportione D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior quoque quam E, ad *B*; ac propterea *A*, maior erit quam E. Quare minor erit proportio B, ad *A*; maiorem, quam B, ad E, minorem: Sed vt est B, ad E. ita

est

est conuertendo D,ad C.Igitur proportio *B*, ad *A*, minor est quoque, quam D,ad C. Quod est propositum.

THEOREMA XXVII.

PROPOSITIO XXVII.

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartam.

HAbeat enim A,ad B,maiorem proportionem,quam C,ad D. Dico permutando maiorem esse quoque proportionem *A*,ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque esse E, ad B, vt C, ad D, eritque proportio *A*,ad B, maior etiam quam

E,

E,ad B. Ideoque A, maior erit quam E. Quare maior erit proportio A,ad C, quam E,ad C. Quoniam vero permutando eſt, vt E,ad C,ita *B*,ad D (cum poſita ſit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A,ad C, maior quoque erit quam *B*, ad D. Quod eſt propoſitum.

THEOREMA XXVIII

PROPOSITIO XXVIII.

Si prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem quam tertia ad quartam: Habebit quoque compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam maiorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam.

SIt maior proportio *A*B, ad BC, quam *D*E,ad EF. Dico

&

& componendo maiorem esse proportionem *A*C,ad BC, quã DF,ad EF. Intelligatur enim esse C*B*, ad BC, vt DE, ad EF. eritque proportio *AB*, ad BC, maior quoque, quam GB,ad *B*C: Ideoque A*B*,maior quam GB, Addita ergo communi *BC* fiet AC, maior quam GC, maiorq; propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, vt est GC, ad *B*C, ita est DF,ad EF (quod posita sit GB,ad BC, vt DE, ad EF.)Maior ergo etiam erit proportio AC,ad BC, quam DF,ad EF. Quod est propositum.

THEO-

THEOREMA XXIX.

PROPOSITIO XXIX.

Si composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

SIt maior proportio A C, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & diuidendo maiorem esse proportionem AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, vt DF, ad EF, eritque proportio AC, ad BC, maior quoque proportione GC, ad BC: ideoque maior erit AC, quam GC. Ablata ergo cõmuni

muni BC; maior erit AB, quam GB: Ac propterea maior erit proportio AB, ad BC, quam GB, ad BC. Sed diuidendo, vt est GB, ad BC, ita est DE, ad EF. (Posita namque est GC, ad BC, vt DF, ad EF.) Igitur maior quoque erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.

THEO-

THEOREMA XXX.

PROPOSITIO XXX.

Si composita prima cum secunda, ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cũ quarta, ad tertiam.

SIt maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico per conuersionem rationis, minorem esse proportionem AC, ad AB, quam DF, ad DE. Cum enim sit AC, ad BC, maior proportio, quam DF, ad EF, erit & diuidendo, maior proportio AB ad BC, quam DE, ad EF. Quare con-

conuertendo, minor erit proportio BC, ad AB, quam EF, ad DE: Ac propterea, & componendo, minor erit proportio totius AC, ad AB, quam totius DF, ad DE Quod est propositũ.

THEOREMA XXXI.

PROPOSITIO XXXI.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam secundæ posteriorũ ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

SInt tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque maior

maior proportio *A*,ad B,quam D, ad E: Item maior B, ad C, quam E, ad F. *D*ico ex æqualitate maiorem quoque esse A, ad C,quam *D*, ad F. Intelligatur enim esse G,ad C, vt E, ad F; eritque propterea proportio B,ad C, maior, quam G, ad C. Ideoque B,maior erit quam G. Quare maior erit proportio *A*,ad G,minorem, quam *A*, ad *B*,maiorem. Ponitur autem proportio A,ad B,maior quam D,ad E. Multo ergo maior erit proportio *A*,ad C, quam D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G,quam H, ad C; Ideoque *A*, maior erit,quam H. Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas H,ad eandem C: *A*tqui vt H,ad C. ita est, ex

æqualitate D, ad F, (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

THEOREMA XXXII.

PROPOSITIO XXXII.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio prima priorum ad secundam, quam secunda posteriorum ad tertiam; Item secunda priorum ad tertiam maior, quam prima posteriorũ ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior

maior proportio A, ad B, quam E, ad F. Item maior B, ad C, quam D, ad E. Dico esse quoque maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt D, ad E, eritque propterea proportio B, ad C, maior quam G, ad C. Ideoque maior erit B, quam G. Quare maior erit proportio A, ad G, minorē quam eiusdem A, ad B, maiorem: Est autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior est proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F; Eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; ideoque maior erit A, quam H. Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quam H, minor ad eandē C: At vt H, ad C, ita est ex æ-

qualitate D, ad F. (Quoniam vt D, ad E, ita est G, ad C: & vt E, ad F, ita est H, ad G.) Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

THEOREMA XXXIII.

PROPOSITIO XXXIII.

Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit, & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

SIt maior proportio totius AB, ad totam CD, quam ablatæ AE, ad ablatam CF. Dico & proportionem reliquæ EB, ad reliquam FD, maiorem esse, quam totius AB, ad totam CD. Cum enim maior sit proportio

portio AB,ad CD,quam AE, ad CF; erit quoque permutando, maior proportio AB,ad AE,quã CD, ad CF; ac propterea, per conuerſionem rationis, minor erit proportio *AB*, ad EB, quã CD,ad *FD*. Permutando igitur, minor quoque erit proportio *A*B, ad C*D*, quam EB, ad FD. hoc eſt, E*B*,reliqua ad reliquã FD, maiorem habebit proportionem, quam tota AB, ad totam CD. Quod eſt propoſitum.

THEOREMA XXXIV.

PROPOSITIO XXXIV.

Si sint quotcunque magnitudines & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorũ, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem; quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum.

SInt primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D,

D,E,F. Sit autem maior propor-
tio A,ad D,quam B,ad E. Item
maior B, ad E, quam C, ad F.
Dico proportionem ipsarum A,
B,C,simul ad ipsas D,E,F, simul
maiorem esse proportione ip-
sarum B, C, simul ad ipsas E, F,
simul; minorem vero propor-
tione A, ad D: maiorem deni-
que etiam proportione C, ad
F. Cum enim maior sit propor
tio A, ad D, quam B, ad F; erit
permutando maior A, ad B,
quam D, ad E. Igitur compo-
nendo,maior erit proportio ip-
sarum A, B, simul ad B, quam
ipsarum D, simul ad E. Permu-
tando ergo rursus, maior erit
proportio A,B,simul ad D,E,si-
mul,quam B,ad E. Itaque cum
tota A,B,ad totam D,E.maiorẽ
habeat proportionem, quam
ablata B,ad ablatam E,habebit
quoque reliqua A,ad reliquam

D, maiorem proportionem, quam tota A,B,ad totam D,E. Eadem ratione, maior erit proportio B, ad E, quam totius B, C, ad totam E, F: Multo ergo maior erit proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F. Permutando igitur, maior erit proportio A,ad B,C, quam D, ad E, F; & componendo ergo maior eſt proportio totius A,B,C, ad B,C, quam totius D, E,F, ad E, F. Et rurſus permutando maior proportio omniũ A,B,C, ſimul ad omnes D,E, F, ſimul quam B,C, ad E, F, quod eſt primum.

Itaque ſit maior proportio totius A,B,C, ad totam D, E,F, quam ablatę B, C, ad ablatam E, F, erit & maior proportio reliquæ A, ad reliquam D, quã totius A,B, C, ad totam D,E,F. quod eſt ſecundum.

Quo-

Quoniam vero maior eſt proportio B,ad E, quam C, ad F; erit permutando maior quoque B,.ad C, quam E, ad F, & componendo, maior totius BC ad C, quam totius E,F,ad F: & rurſus permutando,maior B,C ad E,F,quam C,ad A,F. Eſt autem maior proportio A,B,C, ad D,E,F, vt oſtendimus,quam B, C,ad E, F. Multo ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D,E,F, quam vltimæ C, ad vltimam F, quod eſt tertium.

Deinde ſint quatuor magnitudines vtrobique cum eadem hypotheſi, hoc eſt, ſit quoque maior proportio tertiæ C, ad F, tertiam, quam G, quartæ ad H,quartam. Dico eadem conſequi. Vt enim iam in tribus eſt oſtenſum, maior eſt proportio B,ad E, quam B,C,G,ad

E, F, H. Multo ergo maior erit A, ad D, quam B, C, G, ad E, F, H. Permutando ergo minor erit A, ad B, C, G, quam D, ad E, F, H, & componendo maior A, B, C, G, ad B, C, G, quam D, E, F, H, ad E, F H, & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, maior quam B, C, G, ad E, F, H. quod est primum.

Itaque cum sit maior proportio totius A, B, C, G, ad totã D, E, F, H, quam ablatæ B, C, G, ad ablatam E, F, H, erit & reliquæ A, ad reliquam D, maior proportio, quam totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H. quod est secundum.

Quoniam vero, vt in tribus est demonstratum, maior est proportio B, C, G, ad E, F, H, quam G, ad H; & maior A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam B, C, G, ad E, F, H. vt fuit ostensum;

multo

multo maior erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H quam vltimæ G, ad vltimam H; quod est tertium.

Eadem arte concludes, eadem consequi in quinque magnitudinibus per quatuor, & in sex per quinque, & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. Constat ergo totum Theorema, &c.

EVCLIDIS

ELEMENTORVM

LIBER SEXTVS.

DEFINITIONES.

1 Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos ęquales, proportionalia.

2 Reciprocæ autem figuræ sunt, cum in vtraque figura antecedentes, & consequentes rationum termini fuerint.

3 Secundum extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cũ

vt

vt tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

4 Altitudo cuiusque figuræ est linea perpendicularis à vertice ad basin deducta.

5 Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

6 Parallelogrammum secundũ aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat maiorem lineam, quam sit ea, secundum quam applicatur: ita tamen, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem, cum

cum parallelogrammo appli-cato, conſtituatque cum eo totum vnum parallelogram-mum.

THEOREMA I.

PROPOSITIO I.

Triangula, & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe, vt baſes.

Sint duo triangula ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum baſes BC, EF Item duo parallelogramma CG. EH, eiuſdem altitudinis, quorum eædem baſes BC, EF. Dico ita eſſe triangulum ABC. ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum E H, vt eſt baſis BC, ad baſin EF. Collocentur

enim

enim tam triangula, quam parallelogramma inter easdem parallelas GH, LN, & ex BL, sumantur quoscunque rectæ BI, IK, KL, ipsi EG, æquales; Item ex FN, abscindantur quotcunque rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex *A*, & *D*, deducantur rectæ *A*I, AK, AL, DM, DN. Erunt igitur triangula *AB*C, AIB, AKI, ALK, super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, inter se equalia. Eadem ratione æqualia erunt triangula DEF, DFM, DMN. Quam multiplex est ergo recta CL, rectæ B*C*, tam multiplex quoque erit triangulum ACL, trianguli A*B*C; & quam multiplex est recta EM, rectæ EF, tam quoque multiplex erit triangulum DEN, trianguli DEF, quia in tot triangula equalia sunt diuisa

uisa tota triangula ACL, DEN, in quot rectas ęquales sectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quoniam vero si basis CL, æqualis fuerit basi EN, necessario triangulum ACL, ęquale est triangulo DEN, ac proinde si CL, maior fuerit quam EN, necessario ACL, maius est quam DEN, & si minor, minus; deficient propterea vna CL, recta, & triangulum ACL, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC, ab EN, recta triãgulo DEN, ęquemultiplicibus secundę EF, & quartæ DEF, vel vna ęqualia erunt, vel vna excedent, si ea sumantur, quę inter se respondent. Quare quæ proportio est primę BC, ad secundam EF, basis ad basim, ea est tertię ABC, ad quartam DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad ba-

sin,

sin, ita est triãgulum ad triangulum, quod est propositum.

Quoniam autem vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est parallelogrammum CG, (quod duplum est trianguli AB C.,) ad parallelogrammum EH: (quod est duplum trianguli DEF) perspicuum est, ita quoque esse parallelogrammũ ad parallelogrammum, vt est basis ad basin. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA II.

PROPOSITIO II.

Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quedam linea, hac proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, qua ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

IN triangulo A B C, ducatur primum recta DE, parallela lateri BC. Dico latera AB, AC, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est esse vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. Ductis enim rectis CD, BE, erunt triangula DEB, DEC, super eã-

dem

dem basin DE, & inter easdem parallelas DE, BC, constituta, inter se ęqualia. Quare vt triangulum ADE, ad triangulũ DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triangulum DEC: Atqui vt triangulum ADE, ad triãgulum DEB, ita est basis AD, ad basin DB; (cum hæc triangula sint eiusdem altitudinis vt cõstat, si per E, agatur parallela recta ipsi AB,) & eadem ratione, vt triangulum ADE, ad triãgulum DEC ita est basis AE, ad basin EC Vt igitur AD, ad DB, ita est AE, ad EC, (cum hę duæ proportiones eædem sint proportioni trianguli ADE, ad triãgulum DEC.) quod est propositum.

Secet deinde recta DE, latera AB, AC, proportionaliter. Dico DE, parallelam esse reliquo lateri BC. Ductis enim rur-

rursū rectis CD, BE, erit vt basis AD, ad basin DB, ita triangulum ADE, ad triangulum DEB, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autem vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. Igitur erit vt triangulum ADE, ad triangulū DEB, ita AE, ad EC; Sed rursus vt basis AE, ad basin EC, ita est triangulum ADE, ad triangulū DEC, cum sint altitudinis eiusdem. Igitur vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triāgulum DEC. Æqualia ergo sunt triāgula DEB, & DEC; Ac propterea, cum eandem habeant basin DE, inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est DE, ipsi BC, quod est propositum. Si itaque ad vnū trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

THEO-

THEOREMA III.

PROPOSITIO III.

Si trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulū recta linea secuerit, & basin: basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionē producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.

IN triangulo ABC, recta AD, secet primo angulum BAC, bifariam. Dico esse vt BA, ad AC, ita BD, ad DC. Agatur enim per B, recta BE, parallela ipsi AD, donec cū CA. producta con-

conueniat in E, eritque angulus EBA, ęqualis alterno BAD; & angulus E, externo DAC. Cum igitur duo anguli BAD, DAC, ęquales ponantur; erunt & anguli EBA, & E, inter se ęquales; Ideoque & rectæ BA, EA, inter se ęquales, Vt igitur EA, ad AC, ita BA, ad eandem AC. Atqui vt EA, ad AC, ita est BD, ad DC, cum in triangulo BCE. recta AD, sit parallela lateri BE. igitur vt BA, ad AC, ita est BD, ad DC, quod est propositum.

Sit deinde vt BA, ad AC, ita BD, ad DC. Dico rectam AD, bifariam secare angulum BAC. Agatur enim rursus per B, recta BE, ipsi AD, parallela coiens cum CA, potracta in E. Quoniã igitur vt BA, ad AC, ita ponitur BD, ad DC. Vt autem BD, ad DC, ita est EA, ad AC; (quod in trian-

triangulo *BCF*, recta *AD*, sit lateri BE, parallela) Erit vt *BA*, ad *AC*. ita EA, ad eandem AC. Aequale igitur sunt *BA*, & EA, inter se, ac propterea anguli *ABE*, & E, æquales quoq; erunt. Cum igitur angulus *ABE*, ęqualis sit alterno *BAD*, & angulus E, externo DAC, erunt, & duo anguli *BAD*, DAC, inter se ęquales, quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariã sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

rectę DF Quoniam igitur in triangulo BEF, recta AC, parallela est lateri EF, erit AB, ad AF, hoc est, ad DC, (quę æqualis est ipsi AF,) vt BC, ad CE. Permutando igitur erit AB, ad BC, vt DC, ad CE. Rursus, quia in eodem triangulo BEF, recta CD, parallela est lateri BF, erit BC, ad CE, vt FD, hoc est, vt CA (quę ęqualis est ipsi FD) ad ED. Permutando igitur erit BC, ad CA, vt CE, ad ED, Cum igitur sit AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC, ad CA, vt CE, ad ED: erit & ex ęquali AB, ad CA, vt DC, ad ED. Quod est propositum. Aequiangulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA V.

PROPOSITIO V.

Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

HAbeant triangula ABC, DEF, latera proportionalia, sitque AB, ad BC, vt DE, ad EF, & BC, ad CA, vt EF. ad FD, & AB, denique ad AC, vt DE, ad DF. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D, & angulum B, angulo E; & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. Fiat angulus FEG, æqua-

THEOREMA IV.

PROPOSITIO IV.

Aequiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

SInt æquiangula triangula ABC, DCE, sintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, & BAC CDE, Dico esse AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC ad CA, vt CE, ad ED; & AB, denique ad AC, vt DC, ad DE; Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos,

gulos, & consequentia similiter. Constituantur latera BC.CE, secundum lineam rectã, ita vt angulus DCE, externus sit æqualis interno ABC, pariterque externus ACB, interno DEC. Et quia duo anguli ABC, ACB, minores sunt duobus rectis: est autem angulo ACB, æqualis angulus DEC, erunt & anguli B,& E, duobus rectis minores. Quare rectæ BA,& ED productæ ad partes A,D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniam vero angulus externus DCE, ęqualis est interno opposito ABC: parallelæ erunt CD, & BF. Eadem ratione parallelę erunt CA,& EF: quod angulus externus ACB, sit æqualis intero DEC. Parallelogrammum est igitur AGDF, proptereaque recta AF, æqualis rectę CD; & recta CA,

THEOREMA IV.

PROPOSITIO IV.

Aequiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

SInt æquiangula triangula ABC, DCE, sintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, & BAC CDE, Dico esse AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC ad CA, vt CE, ad ED; & AB, denique ad AC, vt DC, ad DE; Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quę æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos,

gulos, & consequentia similiter. Constituantur latera B C.CE, secundum lineam rectã, ita vt angulus DCE, externus sit æqualis interno ABC, pariterque externus ACB, interno DEC. Et quia duo anguli ABC, ACB, minores sunt duobus rectis: est autem angulo ACB, æqualis angulus DEC, erunt & anguli B,& E, duobus rectis minores. Quare rectæ BA,& ED productæ ad partes A,D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniam vero angulus externus DCE, ęqualis est interno opposito AB C: parallelæ erunt CD, & BF. Eadem ratione parallelę erunt CA,& EF: quod angulus externus ACB, sit æqualis intero DE C. Parallelogrammum est igitur AGDF, proptereaque recta AF, æqualis rectę CD; & recta CA,

THEOREMA IV.

PROPOSITIO IV.

Aequiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

SInt æquiangula triangula ABC, DCE, sintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, & BAC CDE, Dico esse *AB*, ad BC, vt DC, ad CE, & BC ad CA, vt CE, ad ED; & AB, denique ad AC, vt DC, ad DE; Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quę æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos,

gulos, & consequentia similiter. Constituantur latera B C.CE, secundum lineam rectā, ita vt angulus DCE, externus sit æqualis interno ABC, pariterque externus ACB, interno DEC. Et quia duo anguli ABC, ACB, minores sunt duobus rectis: est autem angulo ACB, æqualis angulus DEC, erunt & anguli B,& E, duobus rectis minores. Quare rectæ BA,& ED productæ ad partes A,D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniam vero angulus externus DCE, ęqualis est interno opposito AB C: parallelæ erunt CD, & BF. Eadem ratione parallelę erunt CA,& EF: quod angulus externus ACB, sit æqualis intero DE C. Parallelogrammum est igitur AGDF, proptereaque recta AF, æqualis rectę CD; & recta CA,

THEOREMA IV.

PROPOSITIO IV.

Aequiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

SInt æquiangula triangula ABC, DCE, sintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, & BAC CDE, Dico esse *AB*, ad BC, vt DC, ad CE, & BC ad CA, vt CE, ad ED; & AB, denique ad *A*C, vt DC, ad DE; Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quę æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos,

gulos, & consequentia similiter. Constituantur latera B C.CE, secundum lineam rectã, ita vt angulus DCE, externus sit æqualis interno ABC, pariterque externus ACB, interno DEC. Et quia duo anguli ABC, ACB, minores sunt duobus rectis: est autem angulo ACB, æqualis angulus DEC, erunt & anguli B,& E, duobus rectis minores. Quare rectæ BA,& ED productæ ad partes A,D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniam vero angulus externus DCE, ęqualis est iuterno opposito AB C: parallelæ erunt CD, & BF. Eadem ratione parallelę erunt CA,& EF: quod angulus externus ACB, sit æqualis intero DE C. Parallelogrammum est igitur AGDF, proptereaque recta AF, æqualis rectę CD; & recta CA,

rectę DF Quoniam igitur in triangulo BEF, recta AC, parallela est lateri EF, erit AB, ad AF, hoc est, ad DC, (quę æqualis est ipsi AF,) vt BC, ad CE. Permutando igitur erit AB, ad BC, vt DC, ad CE. Rursus, quia in eodem triangulo BEF, recta CD, parallela est lateri BF, erit BC, ad CE, vt FD, hoc est, vt CA (quę ęqualis est ipsi FD) ad ED. Permutando igitur erit BC, ad CA, vt CE, ad ED, Cum igitur sit AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC, ad CA, vt CE, ad ED: erit & ex ęquali AB, ad CA, vt DC, ad ED. Quod est propositum. Aquiangulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA V.

PROPOSITIO V.

Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

HAbeant triangula ABC, DEF, latera proportionalia, sitque AB, ad BC, vt DE, ad EF, & BC, ad CA, vt EF. ad FD, & AB, denique ad AC, vt DE, ad DF. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D, & angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. Fiat angulus FEG, ęqua-

lis angulo B ; & angulus EFG, angulo C, conueniantque re-ctæ EG,FG,in G: eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A,æqualis. Aequiangula igitur sunt triangula ABC,GEF. Quare vt AB,ad BC,ita est GE ad EF:vt autẽAB,ad BC,ita ponitur DE,ad EF. Igitur vt GE, ad EF,ita est DE,ad EF,eandẽ: proptereaque æquales erunt GE, DE. Rursus, quoniam vt BC,ad CA,ita est EF,ad FG, Vt autem BC,ad CA, ita ponitur EF,ad FD, erit vt EF,ad FG,ita eadem EF,ad FD; ideoq; æquales erunt FG, FD. Itaque cum latera EG,FG, æqualia sint lateribus DE,DF,vtrumque vtrique,& basis communis EF,erũt anguli G,& D,æquales;ac propterea, & reliqui anguli GEF, GFE, reliquis angulis DEF, DFE,æquales erunt. Quamobrẽ cum

cũ angulus G, æqualis sit angulo A; erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis, eodemque modo angulus DEF. angulo B, & angulus DFE, angulo C, æqualis erit, quod est propositũ. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendum erat.

THEOREMA VI.

PROPOSITIO VI.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circũ æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesq; habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

Sit angulus B, trianguli ABC, æqualis angulo E, triangúli

guli DEF,sintque latera AB,BC proportionalia lateribus DE,E F,hoc est,sit AB,ad BC, vt DE, ad EF. Dico reliquos angulos reliquis angulis ęquales esse, angulum scilicet A , angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera respiciunt Fiat angulo B æqualis angulus FEG; & angulo C,angulus EFG; eritq; vt in pcedēti propos. dictum est,triāgulum GEF,triangulo ABC, æquiangulum . Quare vt AB,ad BC,ita est GE,ad EF Sed vt A B,ad BC,ita ponitur DE,ad EF, Igitur vt DE,ad EF,ita est GE , ad eandem EF , atque idcirco DE,GE,æquales erunt. Itaque cum latera DE,EF,æqualia sint lateribus GE,EF, & anguli ipsis contenti æquales,quoque (nam angulo B , cui factus est æqualis angulus FEG , æqualis est

est positus angulus DEF, proptereaque æquales ad inuicem erunt anguli DEF, GEF, erũt reliqui anguli *D*, BED, reliquis angulis G, EFG, æquales. Cum ergo angulus G sit æqualis angulo A, & angulus EFG, angulo C; erunt etiam angulis A, C, æquales anguli D, *EFD*, & ob id æquiangula erunt triangula ABC, DEF, quod est propositum. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA VII.

PROPOSITIO VII.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant: reliquorum verò simul vtrumque aut minorem, aut non minorē recto: Aequiangula erunt triāgula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

SIt angulus A. trianguli ABC, æqualis angulo D. trianguli DEF, & latera AC, CB, circa angulum ACB, proportionalia lateribus DF, FE, circa angulum F, hoc est sit vt AC, ad CB ita DF, ad FE, hac tamen lege, vt quilibet reliquorum, angu-

lorum

lorum B, & E, sit vel minor recto, vel non minor. Dico ęquiāgula esse triangula, angulos scilicet ACB, & F, circa quos sunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales esse. Sit enim primum tam B, quam E, recto minor: Quo posito, si anguli ACB, & F, non sunt ęquales, sit ACB, maior, quam F: fiatque ipsi F, æqualis ACG. Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur æqualis, erit & reliquus AGC, reliquo E, æqualis; ideoque triangula AGC, DEF, æquiangula erunt. Quare vt AC, ad CG, ita erit DF, ad FE: Sed vt DF, ad FE, ita ponitur AC, ad CB. Vt igitur AC, ad CG, ita erit eadem AC, ad CB, ac propterea æquales erunt CG, CB, & anguli CBG, CGB, ęquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor erit & CGB

minor recto, ideoque ei deinceps AGC, recta maioris (cum AGC, CGB, sint duobus rectis ęquales; Est autem ostensus angulus AGC, angulo E, æqualis. Maior igitur recto est quoque angulus E; Sed positus est etiam recto minor. Quod est absurdum.

Sit deinde tam B, angulus, quam E, recto non minor; eritque vt prius, angulus B, angulo CGB, ęqualis, ideoque & CGB, recto non minor erit; ac propterea anguli CBG, CGB, in triangulo BCG, non minores erunt duobus rectis, sed vel maiores, vel æquales duobus rectis, quod est absurdum. Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inęquales sunt anguli ACB, & F, sed æquales, atque idcirco reliqui etiam anguli B, & E, æquales erũt, quod

est

est propositum. Si duo itaque triangula vnum angulum vni angulo æqualem,&c. Quod demonstrandum erat.

THEOREMA VIII.

PROPOSITIO VIII.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus à quo ad basin perpendicularis agatur AD. Dico triangula ADB, ADC, similia esse, & toti triangulo ABC, & inter se. Cum enim in triangulis ABC, DBA, anguli BAC, & ABD, sint recti, & angu-

lus B,communis; erunt & reliqui anguli *ACB*,& DAE,ęquales. Aequiangulum est igitur triangulum *DBA*,triangulo AB C,ac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia,&c.hoc est,erit vt CB,ad *BA*,ita *BA*, ad BD, & vt BA,ad AC.ita BD. ad DA; & vt *BC*,ad CA , ita *BA*,ad AD. Ita enim latera homologa ęqualibus angulis opponuntur, vt vult propos. 4. huius lib: Quare simile est triangulũA*D*B toti triãgulo ABC, Eodē modo ostendetur triangulum ADC,simile eidem triangulo ABC. Nā anguli BAC,& ADC,sunt recti, & augulus C , communis ; ac propterea reliqui anguli *A*BC, & CAD,æqualis. Quare vt BC, ad CA,ita est CA,ad CD , & vt CA,ad AB,ita CD,ad DA, & vt CB,ad BA,ita CA,ad AD.Sic enim

nim opponuntur quoque homologa latera angulis æqualibus, ex prǣscripto propos.4.huius lib. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula ADB,& ADC, cum anguli ADB,ADC,sint recti, & anguli ABD,CAD,ostensi ęquales,nec non anguli BAD,ACD; Atque idcirco fit vt BD,ad DA,ita DA ad DC,& vt DA,ad AB,ita DC. ad CA;& vt AB,ad BD, ita CA, ad AD. Si igitur in triangulo rectangulo,ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit &c. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROBLEMA I.

PROPOSITIO IX.

A data recta linea imperatam partem auferre.

IMperetur, vt ex linea *A* B auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta AC, vtcunque faciens angulum CAB, & ex AC, abscindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda est ex A B, vt in proposito exemplo tres AD, DE, EF. Deinde ex F, ad B, recta ducatur F B, cui per *D*, parallela agatur DG. Dico AG, esse partem tertiam imperatam rectæ A *B*. Nam cum in triangulo A B F, lateri FE, parallela sit recta D G; erit vt FD, ad D*A*, ita BG,

ad

ad GA. Componendo igitur, vt FA, ad DA, ita BA, erit ad GA. Sed FA, ipsius AD, est tripla, ex constructione. Igitur & BA ipsius AG, erit tripla; ideoque AG, tertia pars erit ipsius AB, quæ imperabatur A, data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat.

PROBLEMA II.

PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.

Sit recta AB, secanda similiter, vt secta est recta AC, in D, & E, hoc est, in partes, quę sint partibus AD, DE, EC, proportionales. Coniungãtur da-

tæ duæ lineæ ad *A*, facientes angulum quemcunque BAC & connectatur recta BC. Deinde ex D,E, agantur DF, EG, parallelæ ipsi BC. Dico rectam AB, similiter esse sectam in F, & G, vt est secta *A*C, in D, & E. Nam vt AD, ad DE, ita est AF, ad FG. Proportionales ergo sunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod si ducatur DH, ipsi FB, parallela, secans EC, in I; erit rursus, vt DE, ad EC, ita DI, ad IH, hoc est, ita FG, ad GB; quod FG, ipsi DI, & GB, ipsi IH, æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes FG, GB, partibus *D*E, EC. Eademque ratio est de pluribus partibus, si ex E, & C, ipsi *A*B, parallelæ agantur, &c. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, vt data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

PRO-

PROBLEMA III.

PROPOSITIO XI.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem adinuenire.

Sint duæ rectæ AB, AC, ita dispositæ, vt efficiant angulum A quemcunque, sitque inuenienda illis tertia proportionalis, sicut quidem AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producatur AB, quam volumus esse antecedentem, & capiatur BD æqualis ipsi AC, quæ consequens esse debet, siue media. Deinde ducta recta BC, agatur illi ex D, parallela DF, occurrens ipsi AC, productæ in E. Dico CE, esse tertiam proportionalem, hoc est, esse vt AB, ad

ad AC, ita AC, ad CE. Cum enim in triangulo ADE, lateri DE, parallela, sit recta BC; erit vt AB, ad BD, ita AC, ad CE: Sed vt AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, ęqualem ipsi BD. Vt igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

PROBLEMA IV.

PROPOSITIO XII.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

Sint tres lineæ rectę AB, BC, AD, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; sicut quidem AB, ad BC, ita AD, ad quartam. Disponantur primæ duæ

duæ AB, BC, secundum lineam rectam, quæ sit AC: Tertia vero AD, cum prima AB, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrens rectæ AD, productæ in E, puncto. Dico DE, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo ACE, lateri CE acta sit parallela BD; erit vt AB, ad BC, ita AD, ad DE. Quare DE, quarta est proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.

PRO-

PROBLEMA V.

PROPOSITIO XIII.

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

SInt duæ rectæ AB,BC, quibus media inuenienda est proportionalis, dispositæ secũdum lineam rectam AC. Diuisa AC,bifariam in E. ex E,centro, & interuallo EA,vel EC, semicirculus describatur ADC: Deinde ex B,ad AC, perpendicularis educatur BD, ad circumferentiam vsque. Dico BD,esse mediam proportionalem inter AB, & BC. Ductis enim rectis ADCD, erit angulus ADC, rectus in semicirculo.Cum igitur ex angulo recto ADC,trianguli re-

rectanguli ADC, deducta sit ad basin AC, perpendicularis DB, erit per demonstrata propos. 8. huius lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

THEOREMA IX.

PROPOSITIO XIV.

Aequalium & vnum vni aequalem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quae circum aequales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulũ vni angulo aequalem habentiũ reciproca sunt latera, quae circum aequales angulos; illa sunt aequalia.

Sint duo parallelogramma aequalia ABCD, BEFG, habentia

bentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt *A*B, & BG, vnã efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, EBG, sint æquales, erunt & EB, *BC*, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstratum est. Producantur iam DC, & FG, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia sunt parallelogramma DB, BF: erit vt *DB*, ad *BH*, ita BF, ad idem BH; Sed vt DB, ad BH; ita est *A*B, basis ad basin BG, quod parallelogramma sint eiusdem altitudinis; & similiter vt BF, ad BH, ita est basis EB, ad basin *BC*. Igitur vt AB, ad BG, ita est EB, ad BC. Quod est

eſt propoſitum.

E contrario ſint iam latera circa æquales angulos ABC, EBG, reciproca, hoc eſt, vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Dico parallelogramma DB, BF, eſſe æqualia. Facta enim eadem conſtructione; cum ſit, vt AB, ad BG, ita EB, ad BC: Vt autem AB, ad BG, ita DB, ad BH; & vt EB, ad BC, ita BF, ad idem BH: erit quoque vt DB, ad BH, ita BF, ad idem BH; erit quoque vt DB, ad BH, ita BF, ad idem BH. Atque idcirco æqualia erunt parallelogramma DB, BF. Æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum &c. Quod erat demonſtrandũ.

THEO

THEOREMA X.

PROPOSITIO XV.

Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum, triãgulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnũ angulum vni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

SInt duo triangula æqualia ABC, DBE, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB, ad BE, ita DB, ad BC. Coniungantur enim triangula ad angulos æquales, ita vt AB, BE, vnam efficiant lineam rectam,

Quo

Quo facto, cum anguli ABC, DBE, sint æquales, erunt & DB, BC vna recta linea, vt demonstratum est ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta CE, quoniam æqualia sũt triangula ABC, DBE, erit vt ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE. Sed vt triangulum ABC, ad triangulum BCE, ita est basis AB, ad basin BE, quod hæc triangula eiusdem sint altitudinis; & similiter vt DBE, ad BCE, ita est basis DB, ad BC. Quare vt AB, ad BE, ita est DB ad B. Quod est propositum.

Iam vero contra, sint latera circa angulos equales, qui ad B, reciproca, hoc est, vt AB, ad BE, ita DB, ad BC, Dico triangula ABC, DBE, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cum sit vt AB, ad BE, ita DB, ad BC; vt autẽ AB, ad BE,

ita triãgulũ ABC, ad triangulũ BCE;& vt DB,ad BC,ita triangulum DBE, ad triangulum idem BCE; erit vt ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE, propterea que æqualia erunt triãgula ABC,DBE. Æqualium igitur, & vnum vni ęqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOREMA XI.
PROPOSITIO XVI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint

SInt quatuor rectæ proportionales *AB*,FG,EF,*BC*;vt quidem *AB*, ad FG, ita EF, ad BC: Sitq; rectangulum ABCD, compræhensum sub extremis AB, *BC*; rectangulum vero EF GH, comprehensum sub medijs EF,FG. Dico rectangula *AC*,EG,esse æqualia. Cũ enim anguli recti B, & F, sint æquales, & sit vt AB, ad FG, ita EF, ad BC,erunt latera circa equales angulos *B*, & F, reciproca. Quare parallelogramma A C, EG, æqualia erunt. Quod est propositum.

Contra vero, sint iam æqualia rectangula AC, EG. Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF,BC,esse proportionales,hoc est, esse vt *AB*,ad FG,ita EF,ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, EG, habeantq; angulos æquales,nempe rectos

B, & F, erunt latera circa hosce angulos reciproca; sicut quidē AB, ad FG, ita EF, ad BC. Itaq; si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

THEOREMA XII.

PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprahenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprahensum rectāgulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres lineæ rectæ AB, EF, & BC, proportionales; vt qui-

quidem AB, ad EF, ita EF, ad BC: sitque rectangulum ABCD contentum sub extremis AB, BC, & quadratum mediæ EF, sit EFGH. Dico æqualia esse rectangulum AC, & quadratũ EG. Sumpta enim recta FG, quæ æqualis sit ipsi EF, erunt quatuor lineæ AB, EF, FG, BC, proportionales; vt quidem AB ad EF; ita FG, ad BC; eritque quadratum EG, compræhensũ sub medijs EF, FG, propter æqualitatem rectarum EF, FG. Quare rectangulum AC, comprehensum sub extremis AB, BC, æquale est quadrato EG, hoc est, rectangulo sub medijs EF, FG, comprehenso. Quod est propositum.

Sed sint iam æqualia rectangulum AC, & quadratum EG. Dico esse vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint

rectangula A C, & E G, erit vt AB, ad EF, ita FG, ad BC: Vt autem FG, ad BC, ita est EF, ipsi FG, ęqualis, ad eandem BC. Quare vt AB, ad EF, ita est EF, ad B C. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA VI.

PROPOSITIO XVIII.

A data recta linea dato rectilineo simile, similiterq; positum rectilineum describere.

SIt data recta AB, super quā describendum sit rectilineum rectilineo CDEFG, simile similiterq; positum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad singulos angulos oppositos rectæ lineæ, quæ rectilineū re-

resoluant in triangula CDF, DE F, FGC. Deinde super AB, constituatur AIB, triangulum, æquiangulum CDF, & super AI, triangulum AKI, equiangulum CGF, & IBH, æquiangulum DE F, ex quo constat rectilinium esse equiangulum dato ex cōstructione. Quoniam vero ita est AB, ad BI, vt CD, ad DF: & ita BI, ad BH, vt DF, ad DE; erit ex æquo ita AB, ad BH, vt CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos ABH, CDE, proportionalia sunt; quemadmodum, & latera circa equales angulos H, & E, proportionalia sunt, ob triangula equiangula BHI, DEF. Rursus ita est HI, ad IB, vt EF, ad FD: & ita IB, ad IA, vt FD, ad FC. & ita IA, ad IK, vt FC, ad FG. Igitur ex æquo erit ita HI, ad IK; vt EF, ad IG, & ideo latera quoque cir-

ca ęquales angulos HIK, EFG, proportionalia erunt, & ſic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum ſint ęquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, ſimilia ſunt, ſimiliterque deſcripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo ſimile ſimiliterq; poſitum rectilineũ deſcripſimus. Quod faciendum erat.

THEOREMA XIII.

PROPOSITIO XIX.

Similia triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

SInt triangula ſimilia ABC, DEF, habentia angulos æquales B, & E: Item C, & F, &c. Et ſit vt AB, ad BC, ita DF, ad

ad EF, &c. Dico triangula inter se rationem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa BC, & EF, & quidem si sint ęqualia latera AB, DE, constat triangula esse æqualia ex 26. prin. cum anguli sint æquales, & ita etiam media proportionalis inuenta erit ęqualis, & duplicata proportio erit æqualitatis. Sint ergo primum latera BC, EF, æqualia, ac proinde, & tertia proportionalis BG, illis æqualis, ita vt proportio BC, ad BG, quę duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, quod ipsa inter se æqualia sint, ob angulos B, C, angulis E, F, ęquales, & ęqualitatem laterum BC, EF,

ca ęquales angulos HIK, EFG, proportionalia erunt, & ſic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum ſint ęquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, ſimilia ſunt, ſimiliterque deſcripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo ſimile ſimiliterq; poſitum rectilineũ deſcripſimus. Quod faciendum erat.

THEOREMA XIII.

PROPOSITIO XIX.

Similia triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

SInt triangula ſimilia ABC, DEF, habentia angulos æquales B, & E: Item C, & F, &c. Et ſit vt AB, ad BC, ita DF, ad

ad EF, &c. *Dico* triangula inter se rationem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa BC, & EF, & quidem si sint ęqualia latera AB, D E, constat triangula esse æqualia ex 26. prin. cum anguli sint æquales, & ita etiam media proportionalis inuenta erit ęqualis, & duplicata proportio erit æqualitatis. Sint ergo primum latera *B*C, EF, æqualia, ac proinde, & tertia proportionalis *B*G, illis æqualis, ita vt proportio BC, ad *B*G, quę duplicata dicitur proportionis lateris *B*C, ad latus EF, sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, quod ipsa inter se æqualia sint, ob angulos B, C, angulis E, F, ęquales, & ęqualitatem laterum BC, EF,

 tota

tota erunt æqualia.

Sit deinde BC, latus latere EF, maius; & ex BC, abscindatur rectis BC, EF, tertia proportionalis BG, ducaturque recta AG. Quia igitur est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit permutando, vt AB, ad DE, ita BC, ad EF: Vt autem BC, ad EF, ita est per cõstructionem EF, ad BG. Vt ergo AB, ad DE, ita erit EF, ad BG. Quare cum triangula ABG, DEF, habeant latera circa angulos B, E, ęquales reciproca, ipsa inter se ęqualia erunt; & propterea vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita erit idem triangulum ABC ad triangulum ABG Vt autem triangulum ABC, ad triangulũ ABG, eiusdem altitudinis, ita est basis BC, ad basin BG. Igitur vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est BC, ad

BG.

BG. *Atqui* cum tres lineæ BC, EF, BG, sint continuè proportionales, proportio primæ BC, ad tertiam BG, duplicata dicitur proportionis BC, primæ ad EF, secundam. Igitur & triangulum ABC, ad triangulũ DEF, proportionem habet duplicatam proportionis lateris BC, ad latus EF. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XIV.

PROPOSITIO XX.

Similia polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis; Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

SInt polygona similia ABC DE,FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK, Itē angulos B, G, & sic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos ęquales; vt quidem AB,BC,ita BG,ad G H; & vt BC,ad CD, ita GH,ad HI,&c. Dico primum,hæc polygona diuidi in triangula similia,quæ sint numero ęqualia. Angulus enim BAE,GFK,rectę educantur ad singulos angulos oppositos,quę sint AC,AD,FH, FI; diuisaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi,& circa ipsos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula ABC,IGH, & eadem ratione ostendetur de omnibus triangulis in quibus resoluitur.

Dico

Dico præterea, triãgula hęc esse homologa totis polygonis, hoc est, ita esse quodlibet triãgulum in vno polygono ad suum correspondens triangulũ in altero polygono, vt polygonum ad polygonum. Quoniam enim similia sunt triangula AB C, FGH, erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum AC, FH. Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD, FHI, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorũ AC, FH. Quare vt triangulum ABG. ad triangulum FGH, ita erit triangulum ACD, ad triangulum FHI, cum vtraque hæc proportio triangulorum sit duplicata eiusdem proportionis lateris AC, ad latus FH. Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum ADE,

ad

ad triangulum FIK, vt ACD, ad FHI: Atque ita deinceps, si plura fuerint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula vnius polygoni cum triangulis alterius, ita vt triangula vnius sint antecedentia, & triangula alterius consequentia proportionum. Vt autem vnum antecedens ad vnum consequẽs, ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia. Igitur vt quodlibet triangulum vnius polygoni ad sibi respondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoq: triãgula homologa erunt totis polygonis.

Dico postremo, polygona inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa. Cum enim sit, vt triangulum ABC, ad triã-
gulum

gulum FGH, ita polygonum, ABCDE, ad polygonum FGHI K; Triangulum vero ABC, ad triangulum FGH, habeat proportionem duplicatam eius, quam habent latera homologa *AB*, FG, hoc est, eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inuentã; habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc est eandem, quam habet *AB*, ad illam tertiam inuentam. Itaque, similia polygona in similia triãgula diuiduntur, &c. Quod demonstrandum erat.

THEO-

THEOREMA XV.

PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

SInt rectilinea ABC, DEF, rectilineo GHI, similia: Dico, & ipsa inter se esse similia. Cum enim propter similitudinem, anguli rectilinei ABC æquales sint angulis rectilinei GHI; Itẽ eadẽ de causa anguli rectilinei DEF, æquales angulis eiusdẽ rectilinei GHI; erũt anguli rectilinei ABC æquales angulis rectilinei DEF. Rursus cũ ob eandem similitudinem, latera rectilinea ABC, proportionalia sint lateribus rectilinei GHI, ea videlicet ijs, quæ circum æquales sunt angulos: Item

Item eādem ob causam, latera rectilinei DEF, proportionalis lateribus eiusdē rectilinei GHI; erunt quoque latera rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum ijs, quę angulos ambiunt æquales. Atque adeo per definitionem, similia existent rectilinea ABC, DEF Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

THEOREMA XVI, PROPOSITIO XXII.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint; ipsæ etiam

etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

SInt primum quatuor rectæ Ab,CD,EF, GH, proportionales,vt quidem AB,ad CD ita EF,ad GH.Constituanturq; super AB,CD,duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta ABI, CDK; Item super EF,GH,alia duo quęcunq; rectilinea similia similiterque descripta,EFML, GHON. Dico & hæc rectilinea esse proportionalia,vt quidem ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. Inueniatur enim rectis AB, CD, tertia proportionalia P; & rectis EF, GH, tertia proportionalis Q. eritque ex æquo,vt AB, ad P, ita EF,ad Q. Vt autem AB, ad P, ita est rectilineum ABI, ad rectilineum CDK,simile similiterque descriptum,ex corollario

rio propositionis 20. huius lib. vel si fuerint triangula, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, vt EF, ad Q, ita rectilineum EM, ad rectilineum GO. Igitur vt ABI, ad CDK, ita erit EM, ad GO. Quod est propositum.

Deinde sint ABI, CDK, EM. GO, rectilinea proportionalia, Dico quatuor rectas AB, CD, EF, GH, esse quoq; proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH. Inueniatur enim tribus rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis RS, super quam describatur rectilineum RSVT simile rectilineo EM, similiterq; positũ: & ob id rectilineo GO. Quoniam igitur est, vt AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoque vt iam est ostensum, vt ABI, ad CDK, ita EM, ad RV. Vt autem ABI, ad CDK, ita quoque ponitur

nitur EM,ad GO. Igitur erit vt EM,ad RV,ita EM,ad GO; Atq; idcirco æqualia erunt RV,GO. Quæ cum ſint ſimilia ſimiliterque poſita,conſiſtent neceſſario,vt mox oſtendemus, ſuper rectas RS,GH; ęquales. Quare erit vt EF,ad RS, ita EF, ad CD. Ponitur autem EF, ad RS, vt AB,ad CD. Igitur erit quoque vt AB,ad CD,ita EF, ad GH. Quamobrem ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XVII.
PROPOSITIO XXIII.

Aequiangula parallelogramma inter ſe rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

SInt parallelogramma æquiangula AC,CF, habentia

tia angulos *BCD*, ECG, æquales. Dico proportionem eorũ esse compositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera vnius circa angulũ æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita vt antecedentia proportionum sint in vno Parallalogrãmo, & consequentia in altero; hoc est, proportionem AC, parallelogrammi ad parallelogrammum CF, compositam esse ex proportionibus rectę BC, ad CG, rectam, & rectæ DC, ad rectam CE; Vel etiam ex proportionibus rectæ BC, ad rectam CE, & rectæ DC, ad rectã CG. Idest, si sumantur tres lineæ I, K, L, ita vt I, ad K, sit, sicut BC, lat⁹ ad lat⁹ CG, & K, ad L, vt latus DC, ad latus CE: ita esse parallelogrammum *A*C, ad parallelogrammum CF, vt est

recta

recta I, ad rectam L; ac proinde cum ex defin. 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L, proportionem quoque parallelogrammi *AC*, ad parallelogrammum CF, dici compositam esse ex eisdẽ proportionibus, hoc est, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt BC, CG, efficiant vnam lineam rectam; Quo posito, cum anguli, BCD, ECG. sint æquales, erunt & DC, CE, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstratũ est. Producantur deinde *AD*, FG, donec conueniant in H; Sumptaque recta I, quacunq; inueniatur tribus BC, CG, & I, quarta proportionalis K: Item tribus DC, CE, & K., quarta

pro-

proportionalis L. Quoniam igitur est, vt BC, ad CG, ita AC, ad CH. Vt autem BC, ad CG, ita posita est I, ad K, erit quoque vt AC, ad CH, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendes esse, vt HC, ad CF, ita K, ad L. Nam vt DC, ad CE, ita est HC, ad CF. Cum ergo posita sit K, ad L, vt DC, ad CE, erit quoque HC, ad CF, vt K, ad L. Ex ęquo igitur erit, vt AC, ad CF, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionibus BC ad CG; & DC, ad CE. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur quoque proportio parallelogrammi AC ad parallelogrammum CE. Eademq; ratione ostendemus, proportionem AC, ad CF, cōponi ex proportionibus BC, ad CE, & DC, ad CG, dummodo parallelogram-

gramma ita coniungantur ad angulos equales, vt BC, CE, efficiant vnam rectam lineam, &c. Aequiangula itaque parallelogramma inter se rationē habent, &c. Quod erat ostendendum est.

THEOREMA XVIII

PROPOSITIO XXIV.

In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma, & toti, & inter se sunt similia.

ESto parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet eius punctum I, ducantur duæ rectę EF, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma FG, FH, circa diame-

diametrum, similia esse & toti parallelogrammo,& inter se se. Quod enim ęquiangula sint toti, facilè ostendetur. Nam angulus CAE, idem est,qui angulus BAD; & angulus externus AEI, ęqualis interno ADC, & angulus ACI,externus interno ABC,& angulus EIG,externus interno EFI, & hic externus interno BCD. Quare æquiangulum est EG, parallelogrammum parallelogrammo BD: Et eadem ratione eidem BD, æquiangulum erit FH. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius,hoc modo demonstrabimus. Cum triangulum AGI,ęquiangulum sit triãgulo ABC, & triangulum AEI, triangulo ADC, vt perspicuum est ex 29. propos. lib. 1. vel etiam ex coroll. propos. 4. huius

lib. erit vt AB, ad BC, ita AG, ad GI, atque ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia sunt. Rursus erit vt BC, ad C*A*, ita GI, ad I*A*; Item vt CA, ad CD, ita I*A*, ad IE. Ex æquo igitur, vt BC, ad CD, ita est GI, ad IE, ac propterea, & latera circa æquales angulos BCD, GIE, proportionalia existunt. Non aliter demonstrabuntur latera, circa reliquos angulos æquales, esse proportionalia. Quare, per definitionem, simile erit parallelogrammum EG, toti parallelogrammo BD. Eadem arte ostendens parallelogrammum FH, simile esse eidem parallelogrammo BD; atque adeo, & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quę circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum.

PRO-

PROBLEMA VII.
PROPOSITIO XXV.

Dato rectilineo simile similiterq; positum, & alteri dato æquale idem constituere.

SInt data duo rectilinea A, & B; sitque constituendũ aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A, æquale vero ipsi B. Super CD, vnum latus rectilinei, cui simile debet constitui, constituatur parallelogrammum CE, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam DE, in angulo EDG qui ęqualis sit angulo DCF, parallelogrammum DH, ęquale ipsi B, eritq; tam CDG, quã FEH, linea vna recta, vt demõstratum est propos. 45. lib. 1. Inueniatur iam inter rectas C D, DG, media proportionalis IK; super quam constituatur

rectilineum L, simile ipsi *A*, similiterq; positum. Dico L, æquale esse alteri rectilineo *B*. Cum enim sint proportionales tres rectæ CD, IK, *D*G; erit per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. vt CD, prima ad DG tertiam, ita A, rectilineum super primam CD, ad rectilineũ L, super IK, secundam simile similiterque descripsimus: Vt autem CD, ad DG, ita est parallelogrammum CE, ad parallelogrammum DH, eiusdem altitudinis. Igitur erit vt CE, ad DH, ita A, ad L. Vt autem CE, ad DH, ita est A, ad B: propterea quod parallelogrammum CE, rectilineo A; & parallelogrammum DH, rectilineo B, constructum est æquale Quare erit vt A, ad B, ita A, ad L; propterea que æqualia erunt rectilinea B, & L; Est autem & L,

simi-

simile ipsi A, similiterque positum per constructionem. Dato igitur rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

THEOREMA XIX.

PROPOSITIO XXVI.

Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatũ sit simile toti & similiter positum, communẽ cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

EX parallelogrammo BD, abscissum sit parallelogrammum EG, simile ei similiterq; positum, habens cum ipso angulum cõmunem EAG. Dico EG, consistere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ AF, CF, quæ si fuerint vna linea recta, perspicuũ

eſt, cum AF, ſit diameter ipſiu
E G, & A C diameter ipſius
BD, parallelogrammũ EG, con
ſiſtere circa diametrum A F C
totius parallelogrammi. Quod
ſi AF, CF, non dicantur efficere
lineam rectam, ducatur totius
parallelogrammi diameter AC
ſecans latus EF, in H, puncto
per quod ipſi F G, parallela
agatur HI. Quoniam igitur pa
rallelogramma BD, EI, ſunt cir
ca eandem diametrum A H C
ipſa erunt ſimilia, ſimiliterque
poſita. Quare erit vt BA, ad
AD, ita EA, ad AI. Sed vt BA
ad AD, ita quoque eſt EA, ad
AG, quod parallelogramma
BD, EG, ponantur etiam ſimi-
lia, ſimiliterque poſita. Igitur
erit vt EA, ad AI, ita EA, ad AG
ac propterea æquales erunt
rectæ AI, AG, pars, & totum.
quod eſt abſurdum.

Quod

Quod si dicatur recta AHC, secare alterum latus FG Tunc ducta HI, parallela ipsi FF, erũt rursus similia parallelogramma BD, IG, similiterque posita. Quare erit vt DA, ad AB, ita G A, ad AI: Sed vt DA, ad AB, ita quoque est GA, ad AE, ob similitudinem parallelogrammorũ BD, EG. Igitur erit vt GA, ad AI, ita GA, ad AE; ideoque æquales erunt rectæ AI, AE, pars & totum, quod est absurdum. Constituunt ergo rectę AF, FC vnam rectam lineam: hoc est, ducta diameter AC, transit per punctum F, & ducta diameter AF, cadit in punctum C. Itaq; si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XX.

PROPOSITIO XXVII.

Omnium parallelogrammorum, secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus similiterque positis ei, quod à dimidia describitur: maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

DEtur recta *A*B, diuisa bifariam in C, superque eius dimidiam B C, constituatur quodcunq; parallelogrammum CDEB, cuius diameter BD. Si igitur compleatur totum parallelogrammum *A*BEH; erit parallelogrammum AD, super dimidiam AC, consistens, applicatum secundum AB, deficiés parallelogrammo C E, & existens simile defectui CE. Dico parallelogrammum AD, ad dimidiam A C, applicatum deficiensq;

ciensque parallelogrammo CE maximum esse omnium, quæ secundum *AB*, rectam applicantur, deficiuntq; parallelogrammis similibus similiterque positis ipsi CE. Sumpto enim puncto G, vtcunque in diametro BD, & ductis per G, rectis FGI, KG, quę sint parallelę rectis *AB*, BE: erit parallelogrammum FK, secundum rectam AB, applicatum, deficiens parallelogrammo KI, quod ipsi CE, simile est, similiterque positũ; cum sit circa eandem cum CE, diametrum. Quoniam vero cōplementa CG, GE, ęqualia sũt; si addatur commune KI, erunt quoque æqualia CI, KE: Est autem CI, ęquale ipsi CF, propter bases ęquales AC, C*B*. Igitur & CF, KE, æqualia erunt; additoque communi CG, ęqualia erunt parallęlogrammum

AG, & gnomon LM. Quare cũ C E, maius sit gnomone LM, (cõtinet enim CE, præter gnomonem, parallelogrammum adhuc DG,) erit quoque AD, ęquale existẽs ipsi CE. propter bases ęquales AC, CB, maius quam parallelogrammum AG, eodem porallelogrammo DG. Eodemque modo ostendetur AD; maius esse omnibus parallelogrammis; quæ ita secundum rectam AB, applicantur, vt punctum G, sit inter pũcta B, & D. hoc est, quæ occupant maiorem lineam semisse A C, habentque minorem altitudinem, quam AD; dummodo defectus similes sint ipsi CE.

PROBLEMA VIII.
PROPOSITIO XXVIII

Ad datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrã-

mum

mum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, nõ maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus, & eius quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo, quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Secta AB bifariam in E, super medietatem E B, describatur parallelogrammum EFGB, simile ipsi D, similiterq; positum, & compleatur totum parallelogrammum AHGB. Si igitur AF, æquale est ipsi C, cum sit applicatum ad AB, deficiens

parallelogrammo EG, simili ipsi D, factum erit, quod iubetur. Si autem A F, maius est quam C. (Neque enim minus esse debet. Nam cum per propos. præcedentem, ipsum sit omniũ applicatorum maximum, dummodo defectus sint similes, nõ posset applicari vllum ad AB, quod esset ipsi C, æquale, sed omnia essent minora. Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datũ rectilineum, &c.) erit quoque sibi æquale E G, maius quam C. Sit igitur maius rectilineo I. (Qua vero ratione excessus duorum rectilineorũ sit inquirendus, dictum est ad propos. 45. lib. 1.) & constituatur parallelogrammum KLMN simile quidem, similiterq; positum ipsi D. seu ipsi EG, æquale vero excessui inuento I; vt sit E G, ęquale rectilineo C, &

paral-

parallelogrammo KM, simul; & ob id maius quam KM. Cum igitur ob similitudinem sit vt EF, ad FG, ita NK, ad KL; erũt quoque latera EF, FG, maiora lateribus NK, ad KL. Si enim his illa forent ęqualia, vel minora, esset etiam EG, ęquale ipsi NL, vel minus, vt constat. Quare abscissis rectis FO, FQ, quæ sint æquales ipsis KN, KL & completo parallelogrammo FQPO; erit hec ipsi LN, ęquale, & eidem simile similiterq; positum, & propterea ipsi EG: atque adeo circa eandem diametrum cum EG, consistet, quę sit BF. Productis iam rectis QP, OP, erit parallelogrammum AP, ad rectam AB, applicatum deficiens parallelogrammo PB, quod simile est ipsi EG, similiterq; positum, & propterea ipsi D. Dico igitur AP, ęquale esse

ipsi

ipsi C, rectilineo. Nam cum PG equale sit complemento PE; si addatur commune PB, erit & BQ equale ipsi EB, hoc est, ipsi ES, quod equale est ipsi ER, propter bases equales EA, EB. Quare si equalibus AO, BQ, commune addatur EP, erit AP, æquale gnomoni TV. Sed gnomon TV, equalis est rectilineo C. (Nam cum EG, parallelogrammum equale sit ipsi C, vna cum LN; si auferantur æqualia QO, LN, remanebit gnomon TV, ipsi C equalis.) Igitur & AP, eidem C, equale erit. Ad rectā ergo AB, applicatum est parallelogrammum AP, deficiens parallelogrammo PB, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale existens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

PROBLEMA IX.

PROPOSITIO XXIX.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrā-mum applicare, excedens figura parallelogrāma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum ęquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Diuisa AB, bifariam in E; super dimidiam EB, constituatur parallelogrammum EFGB, simile ipsi D, similiterque positum. Deinde rectilineo C, & parallelogrāmo EG, constituatur quadratum H, æquale; cui quidem fiat parallelogrammum IKLM, æquale, simile vero ipsi EG, similiterque positum; eritque propterea IKLM, maius quam EFGB, quandoquidem ęquale est quadrato H, quod constru-

ctum

ctum est rectilineo C, vna cum parallelogrammo EG, æquale. Cum igitur ob similitudinem MK, EG, sit vt MI, ad IK, ita EF, ad FG, erunt quoque latera MI, IK, lateribus EF, FG, maiora. Si enim illa his forent ęqualia, vel minora, esset quoque MK, vel ęquale ipsi EG, vel minus, vt perspicuum est. Productis igitur FE, FG, vt rectæ FO, FN, ęquales sint rectis I M, I K, & completo parallelogrammo O N; erit hoc simile, similiterque positum ipsi EG, cum sit æquale ipsi MK, & simile, similiterq; positum. Quare ON, EG, circa eandem diametrum cōsistent. Productis iam AB, GB, ad Q, R; & PO, donec cum AS, ipsi FO, parallela conueniat in S, erit parallelogrammum AP, applicatum ad rectam AB, excedēs parallelogrammo QR, quod simile

mile est ipsi EG, ac propterea ipsi D. Dico igitur AP, æquale esse rectilineo C. Nam cum AO, ER, sint equalia, & ER, equale complemento B N, erit & AO, ipsi BN, equale. Addito ergo communi OQ, fiet AP, æquale gnomoni E P G. Atqui gnomon EPG, equalis est rectilineo C. (Nam cum MK, hoc est, ON, equale sit rectilineo C, vna cum EG; si auferatur commune EG, remanebunt equalia gnomon EPG, & rectilineũ C.) Igitur & AP, equale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est AP, excedens parallelogrammo RQ, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.

PROBLEMA X.

PROPOSITIO XXX.

Propositam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.

SIt recta AB, secanda extrema, ac media ratione. Descripto super eam quadrato ABCD, ad latus DA, applicetur rectangulum DF, equale quadrato AC, & excedens parallelogrammo AF, simili ipsi quadrato; ita vt sit AF, quoq; quadratum, cum quadrato solum quadratum sit simile. Secet autem recta EF, rectam AB, in H. Dico AB, in H, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint DF, & AC, si dematur commune AE, remanebunt equalia GH, HC, quæ cum habeant angulos equales AHF, BHE, vtpote rectos, erũt latera circa illos reciproca, hoc est, erit vt EH, hoc est, vt AB, ipsi EH, equalis ad HF, hoc

est,

est, ad AH, ipsi HF, equalem, vt AH, ad HB Quare cum sit, vt tota AB, ad segmentum AH, ita segmentum AH ad segmentum HB, secta est AB, extrema ac media ratione, per definitioné. Propositam ergo rectam lineã terminatam, &c. Quod erat faciendum.

THEOREMA XXI.
PROPOSITIO XXXI.

In rectangulis triangulis, figura quauis à latere rectum angulũ subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter posita à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

TRiangulum rectangulum sit ABC, habens angulum BAC, rectum; describaturque super BC, quæcunque figura rectilinea BCDE, cui similes, simili-

militerq; positæ super *AB*, AC, constituantur ABFG, ACIH. Dico figuram *BD*, ęqualem esse duabus figuris AF, AI. Demissa enim ex *A*, ad BC, perpendiculari AK, erit per coroll. propos. 8. huius lib. vt *B*C, ad CA, ita C*A*, ad CK. Quare vt BC, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura BD, super primam, ad figuram CH, super secundam similem, similiterq; positam, per coroll. propos. 19 vel 20. huius lib. & conuertendo vt CK, ad BC, ita figura CG, ad figurã BD. Nõ secus ostẽdetur, esse quoq; vt BK, ad BC, ita figuram BG, ad figuram B*D*, cum tres lineæ BC, *B*A, BK, sint quoq; proportionales, &c. Quoniam igitur est vt CK, prima quantitas ad BC, secundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item vt BK, quinta quantitas ad BC, secundam,

ita

ita BG, sexta ad BD, quartam: erit vt prima CK, cum quinta BK, ad BC, secundam, ita tertia CH, cũ sexta BG, ad BD, quartã Sunt autem prima CK, & quinta BK, simul ęquales secundæ BC. Igitur tertia CH, & sexta BG, simul ęquales quoq; erunt quartę BD. Quod est propositũ.

THEOREMA XXII.

PROPOSITIO XXXII.

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum vnum angulum composita fuerint, ita vt homologa eorũ latera sint etiã parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

HAbent triangula ABC, DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DC, ad DE, com-

componanturque ad angulum ACD; ita vt latera homologa AF,DC; Item AC, DE, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam cõponere lineam. Cum enim parallelę sint ABDC, erit angulus A, alterno ACD, ęqualis. Eademq; ratione angulus D, eidem ACD ęqualis erit; ac propterea A,& D, inter se quoq; existent ęquales. Quoniam igitur triangula ABC,DCE, habent latera circa ęquales angulos A,& D, proportionalia; ipsa erunt inter se æquiangula, habebuntq; ęquales angulos B,& DCE. Additis ergo ęqualibus A,& ACD, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE,ACD, hoc est angulo ACE ęquales. Rursus addito cõmuni ACB, fient tres anguli triãguli ABC, duobus angulis ACE,ACB ęquales: Sed illi tres ęquales sunt duobus rectis. Ergo & duo

ACE, ACB, duobus erunt rectis ęquales: Atque idcirco BC, CE vnam rectā lineam constituēt. Itaq; si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXIII.
PROPOSITIO XXXIII.

In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper vero, & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SInt duo circuli ęquales ABC, EFG quorum centra D, H, sumanturq; ex circulis duo arcus quicunque BC, FG, quibus ad centra quidem insistāt anguli BDD, FHG, ad circumferētias vera anguli BAC, FEG. Dico esse, vt arcum BC, ad ar-

componanturque ad angulum *ACD*; ita vt latera homologa *AF*,DC; Item *AC*, DE, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam cõponere lineam. Cum enim parallelę sint ABDC, erit angulus A, alterno ACD, ęqualis. Eademq; ratione angulus D, eidem ACD ęqualis erit; ac propterea A, & *D*, inter se quoq; existent ęquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa ęquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa erunt inter se æquiangula, habebuntq; ęquales angulos *B*, & DCE. Additis ergo ęqualibus A, & ACD, erunt duo anguli *B*, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est angulo ACE ęquales. Rursus addito cõmuni *ACB*, fient tres anguli triãguli ABC, duobus angulis ACE, ACB ęquales: Sed illi tres ęquales sunt duobus rectis. Ergo & duo

ACE,ACB,duobus erunt rectis ęquales: *A*tque idcirco BC,CE vnam rectā lineam constituēt. Itaq; si duo triangula,quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant,&c. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXIII.
PROPOSITIO XXXIII.

In æqualibus circulis,anguli eandem habent rationem cum peripherijs,quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper vero,& sectores,quippe qui ad centra consistunt.

SInt duo circuli ęquales ABC,EFG quorum cenrra D,H, sumanturq; ex circulis duo arcus quicunque BC, FG, quibus ad centra quidem insistāt anguli BDD, FHG, ad circumferētias vera anguli BAC,FEG. Dico esse, vt arcum BC, ad ar-

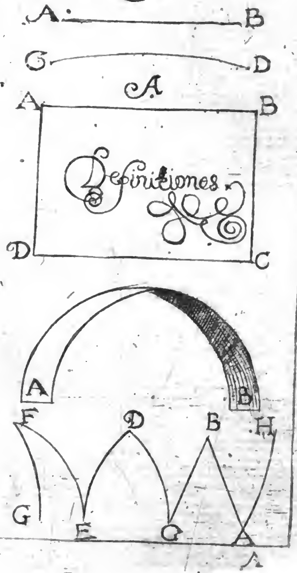
cum FG;ita angulum BDC, ad FHG;& BAC,ad FEG,& sectorem BDC, ad sectorem FHG. Applicentur enim in circulis equales CI,quidem ipsi BC, & ipsi FG,GK, KL, Æquales igitur erunt arcus,quibus hæ rectæ insistunt; ergo & anguli ad centra æquales inter se erunt BDC,& CDI, similiter FHG, & GHL,&c. ergo æque multiplices sunt arcus,& anguli ad cētra,cum sint diuisa in partes equales, & spacia ad centra, & arcus; si ergo arcus se excedēt, vel æquales erunt, similiter, & anguli; ergo vt se habet arcus BC,ad FG;ita angulus BDC,ad FHG, & hoc idem de spacio, vt arcus ad arcum,ita spacium ad spacium, ergo etiam vt angulus BDE,ad FGH;ita dimidiū BAC, ad dimidium FEG, &c. Quod erat demonstrandum.

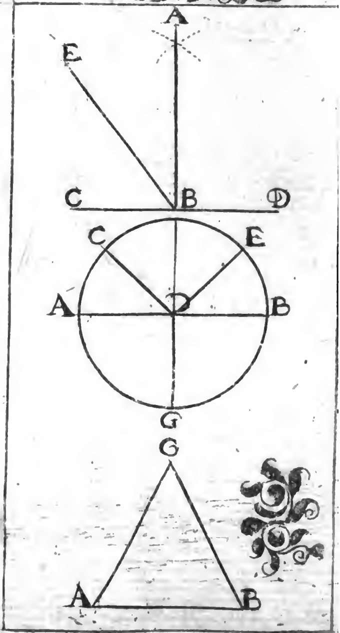
FINIS.

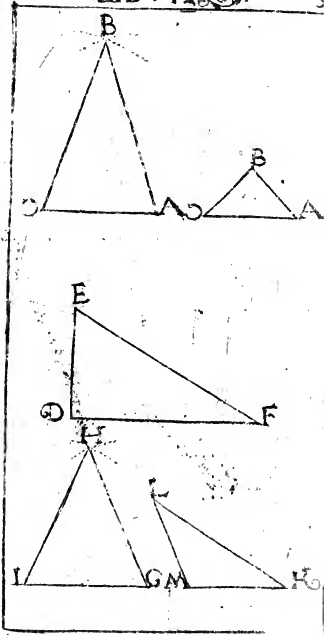

EVCLIDIS
ELEMENTO
RVM
Priores libri VI.
In Gratiam Mathema.
ticæ Studiosorum
GENVÆ
Superiorum Per.
missu
1644
NON DECIPIT SOMNVS

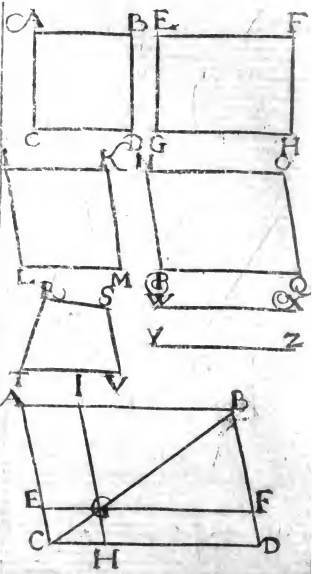


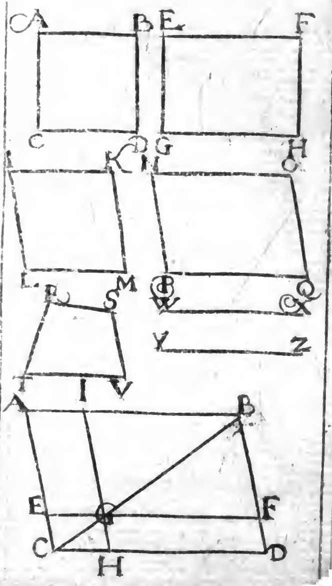
Libri Primi



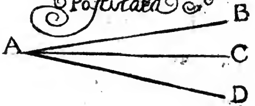

A
E
C
B
D
C
E
A
D
B
G
G
A
B


B
D
A
D
B
A
E
D
F
H
L
I
G
M
K

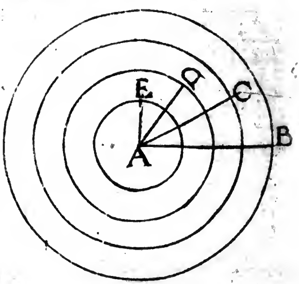

A
B
E
F
C
D
G
H
I
K
N
O
L
M
P
Q
R
S
W
X
Y
Z
T
I
V
A
I
B
E
F
C
H
D


A B E F
C D G H
K N O
L M P Q
R S W X
Y Z
T I V
A I B
E F
C H D

Postulata

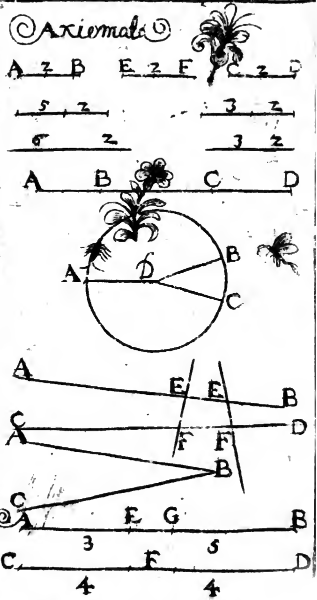




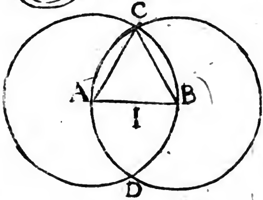


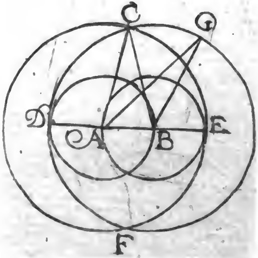


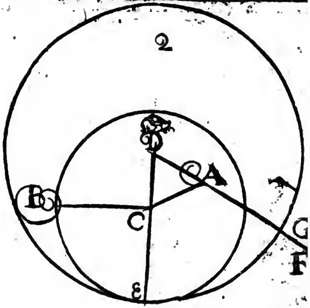
Axiomata

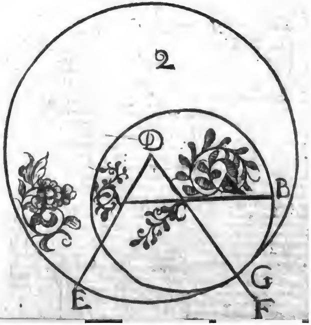


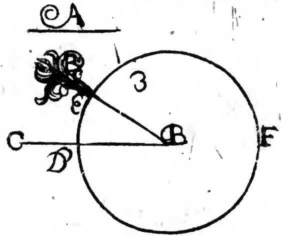
Propositiones



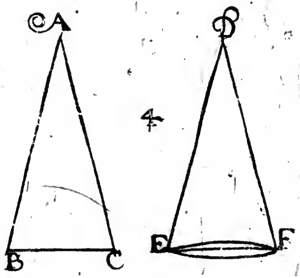



2
D
A
B
C
G
F
E

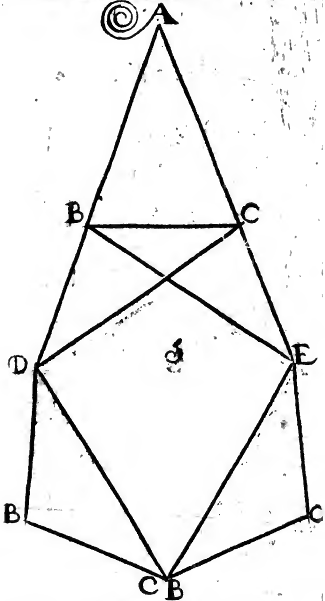

2
D
B
C
G
E
F

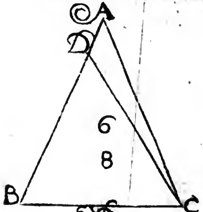


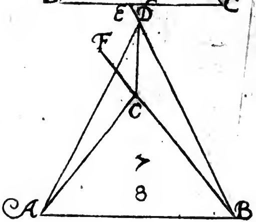
A
E
3
C
D
B
F

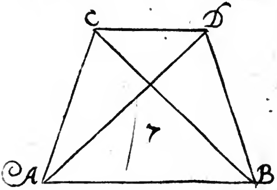


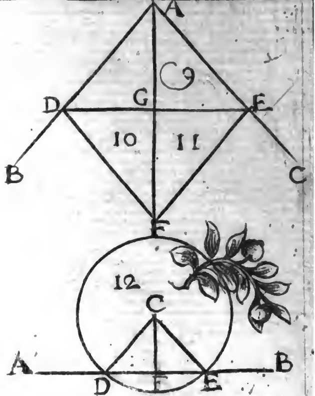
A
D
4
B
C
E
F

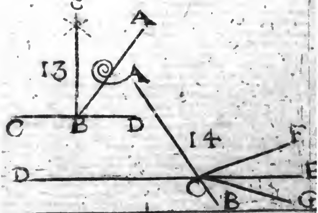

A
B
C
D
E
B
C
CB

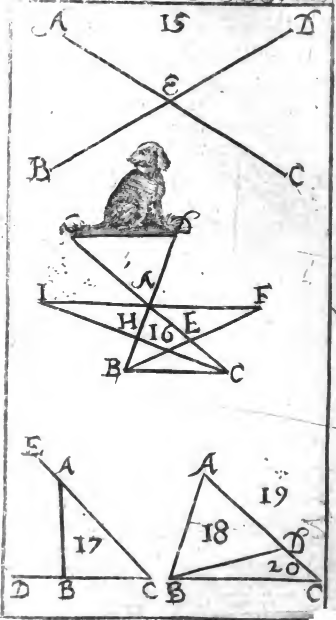

A
D
6
8
B
C

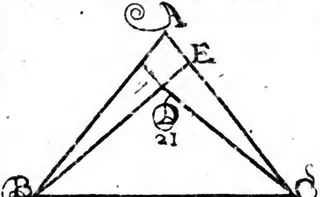

E
D
F
C
7
8
A
B

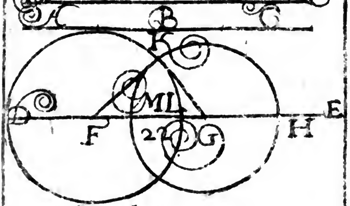

C
D
7
A
B

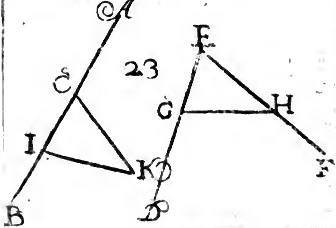

A
9
D
G
E
10
11
B
C
F
12
C
A
B
D
F
E

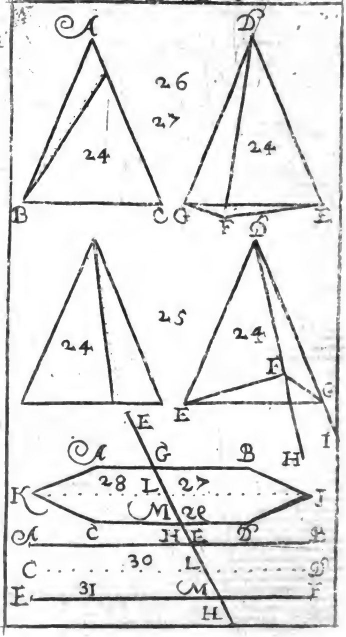

A
13
A
C
B
D
14
F
D
E
C
B
G

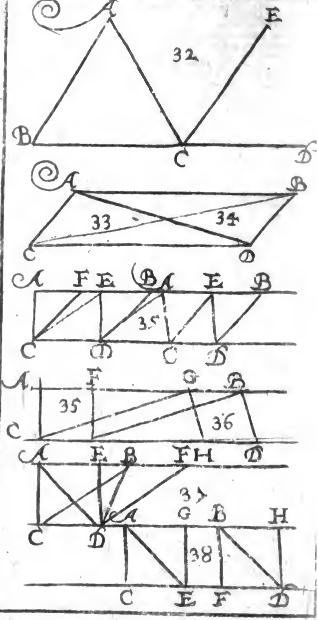

A
15
D
E
B
C
G
A
I
F
H
16
E
B
C
E
A
17
D
B
C
A
19
18
D
20
B
C

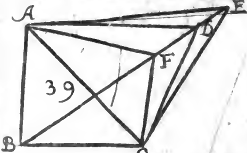

21

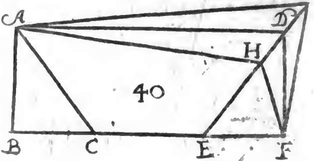

22

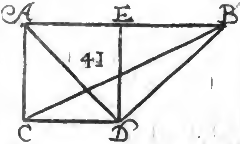

23

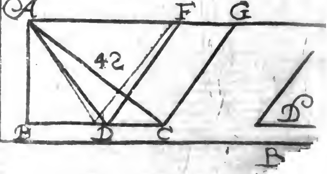

A
B
C
26
27
24
D
G
F
E
24
25
24
E
F
G
H
I
A
G
B
K
28
L
27
I
M
29
C
H
E
D
A
B
C
30
L
D
E
31
M
F
H

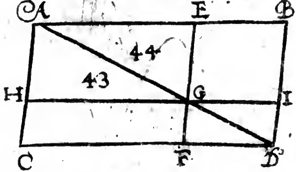

A
E
32
B
C
D
A
B
33
34
C
D
A F E B A E B
35
C D C D
A F G B
35
36
C D
A E B F H D
37
C D A G B H
38
C E F D

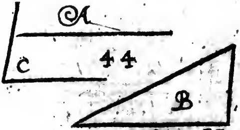

A
E
D
F
39
B
C

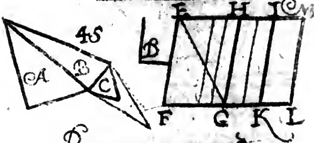

G
A
D
H
40
B
C
E
F

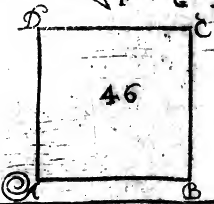

A
E
B
41
C
D

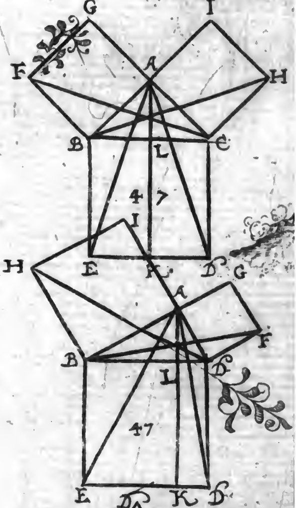

A
F
G
42
D
B
D
C
B

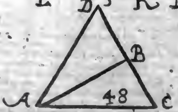

A
E
B
44
43
H
G
I
C
F
D


A
C
44
B

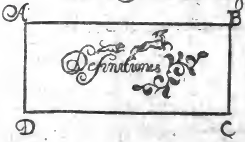

E
H
I
M
45
B
A
B
C
F
G
K
L

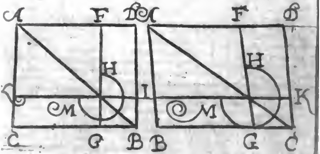

D
C
46
A
B


G
I
F
A
H
B
L
C
47
I
H
E
K
D
G
A
F
B
D
L
47
E
K
D


D
B
A
48
C

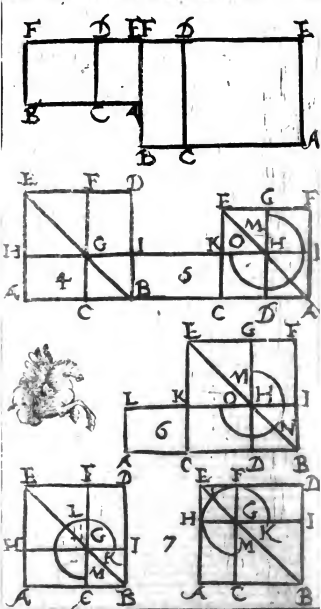
Libri Secundi

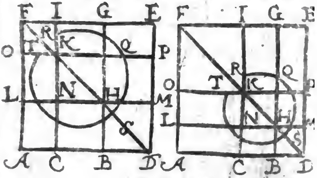




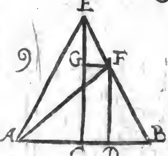
Propositiones

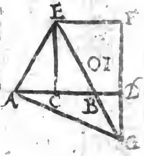


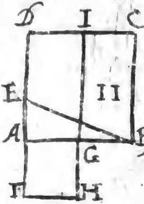


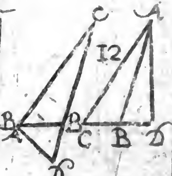

F I G E F I G E
O T R K Q P O T R K Q P
L N H M L N H M
S S
A C B D A C B D

8

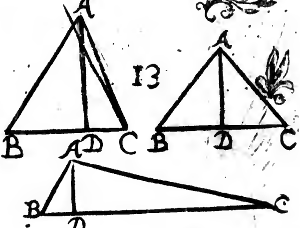

9
E
G F
A B
C D


E F
10
A C B D
G

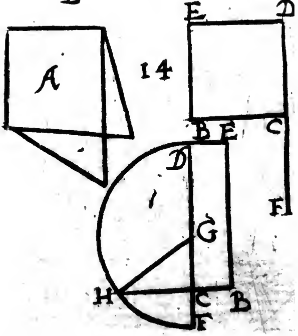

D I C
E 11
A G B
F H


C A
12
A B C B D
D

13

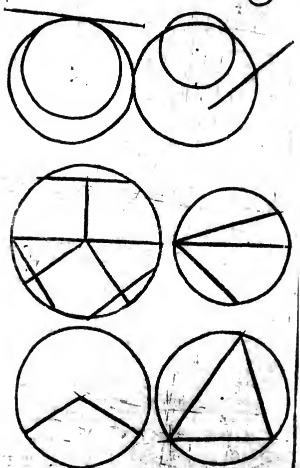


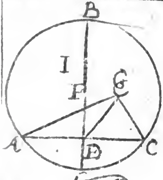
14

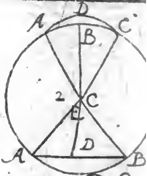




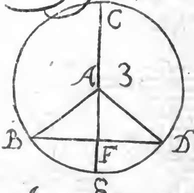
Libri Tertii Definitiones.

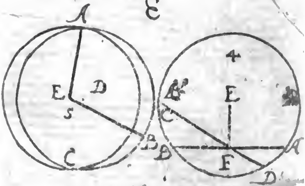


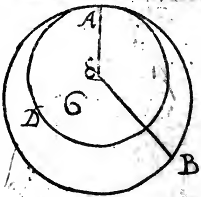


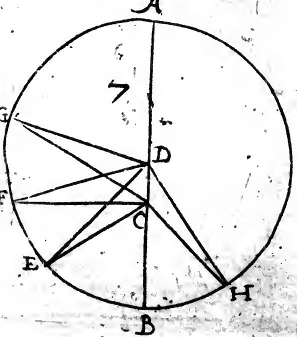


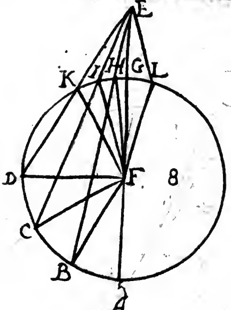
Propositiones

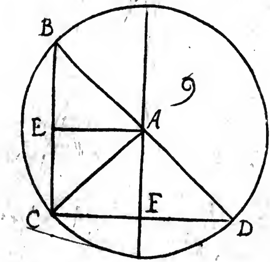


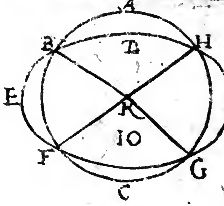


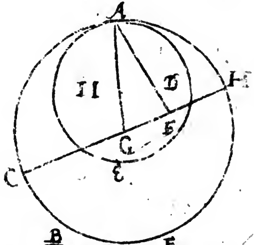

A
8
6
D
B

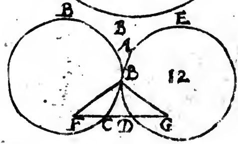

A
7
G
D
F
C
E
H
B

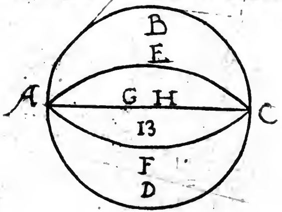

E
K
I
H
G
L
D
F
8
C
B
A

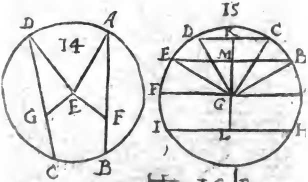

A
B
9
E
A
F
C
D

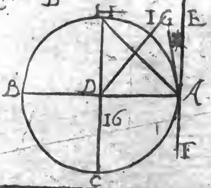

A
B
D
H
E
K
10
F
G
C

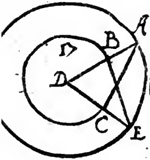

A
11
D
H
E
G
C
B

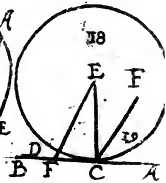

B
B
E
A
B
12
F
C
D
G

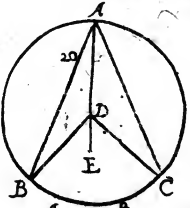

B
E
A
G H
C
13
F
D

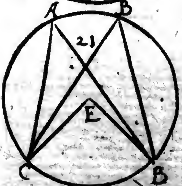

D
A
14
E
G
F
C
B
15
D K C
M
E B
F
G
I H
L

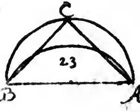

H
16
G
E
B
D
A
16
F
C

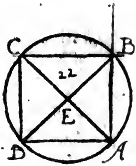

A
B
17
D
C
E

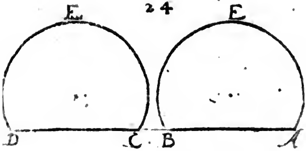

18
E
F
D
19
B
F
C
A

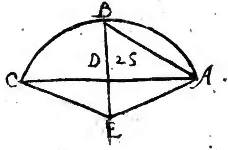

A
20
D
E
B
C

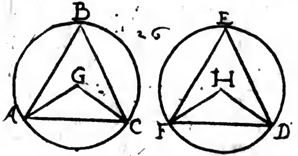

A
B
21
E
C
B


C
23
B
A

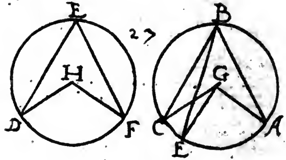

C
B
22
E
D
A


E
24
E
D
C
B
A

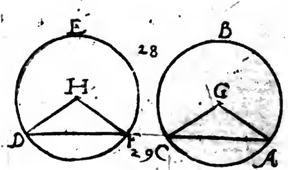

B
D
25
C
A
E



26

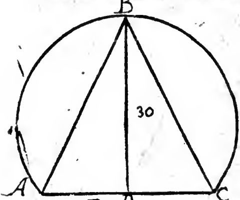


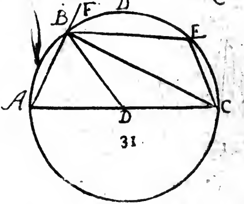
27

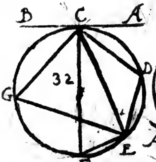


28

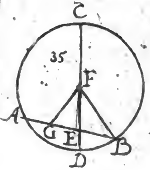
29

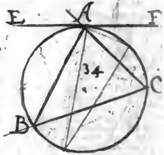

B
30
A
D
C

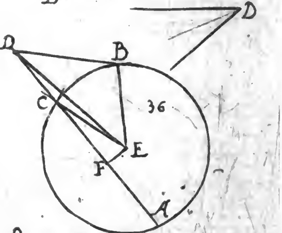

B F
E
A
D
C
31

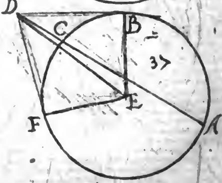

B C A
D
32
G
E
F


G E
C
F
H
33
A
B
D

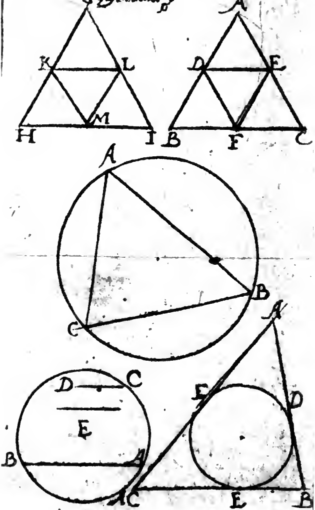

C
35
F
A
G
E
B
D

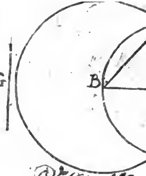

E
A
F
34
C
B


D
D
B
C
36
E
F
A

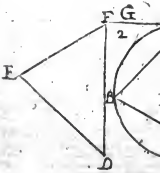

D
C
B
37
E
F
A

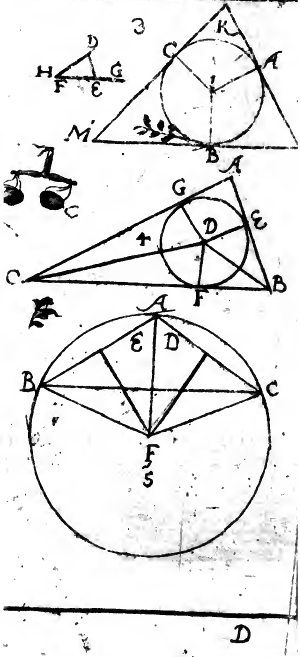
Libri Quarti
Descriptiones

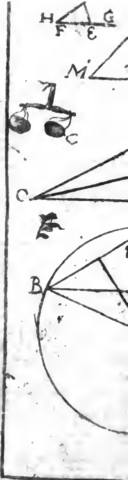


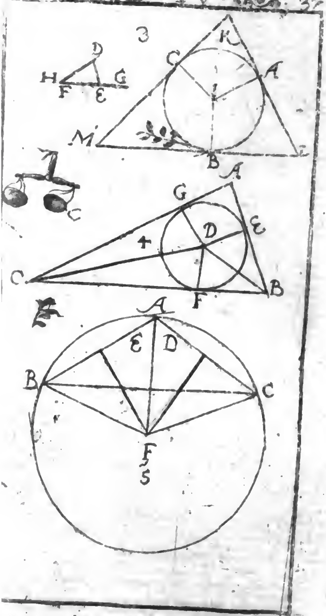


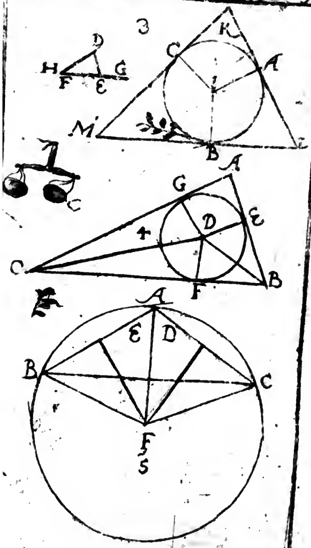
Propositiones

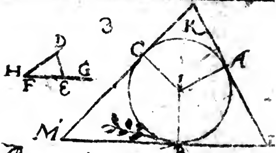


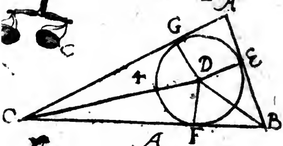

3
D
H
G
F
E
C
K
A
M
B
A
G
E
D
4
C
F
B
A
E
D
B
C
F
5
D

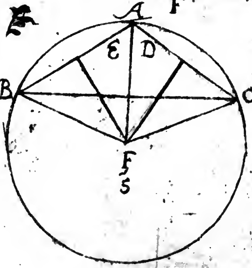

H
G
F
E
M
C
C
B

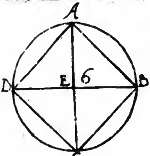

3
D
H
G
F
E
C
K
A
M
B
A
G
E
4
D
C
F
B
5
A
E
D
B
C
F

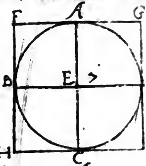

3
D
H
F
E
G
C
K
A
M
B
C
A
G
D
E
4
C
F
B
A
E
D
B
C
F
5

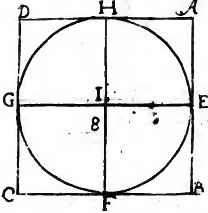

3
K
C
A
D
H
G
F
E
M
B

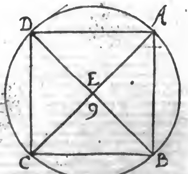

A
G
E
D
4
C
F
B

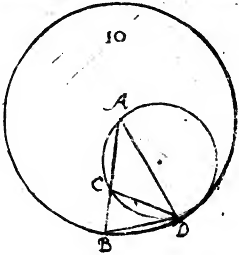

A
E
D
B
C
F
5

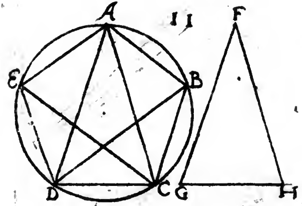

A
D
E
6
B
C

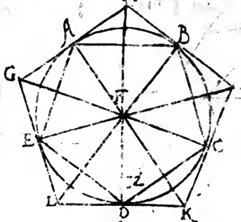

F
A
G
B
E
7
H
C

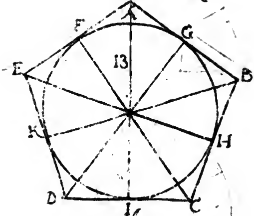

D
H
A
G
I
E
8
C
F
B

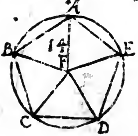

D
A
E
9
C
B

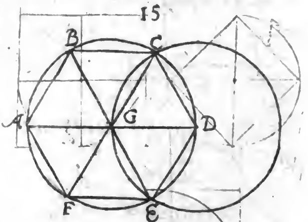

10
A
C
B
D

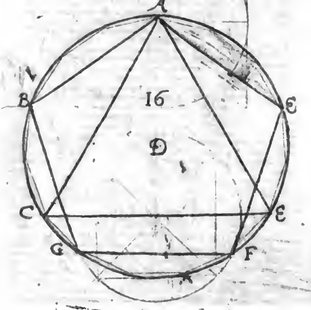

A
11
F
E
B
D
C
G
H


H
A
B
G
I
F
E
C
Z
L
D
K

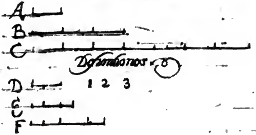

A
F
G
13
E
B
K
H
D
I
C


A
14
B
E
F
C
D

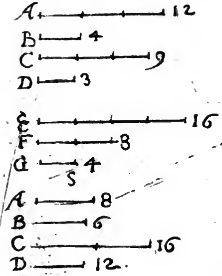

15
B
C
A
G
D
F
E


A
B
16
E
D
C
E
G
F

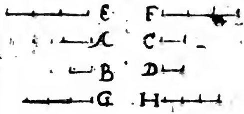
Libri Quinti

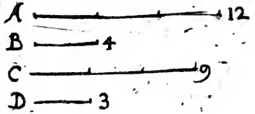


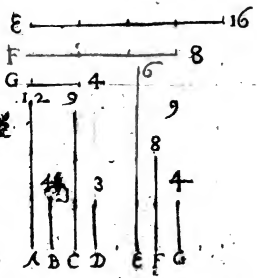
4



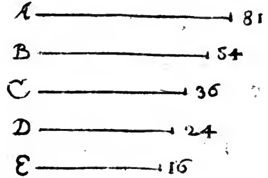
6



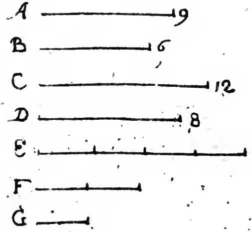




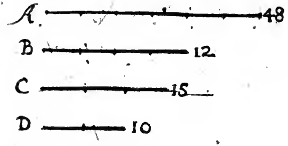
10



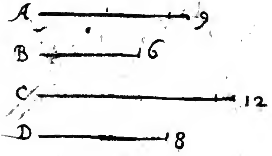
11



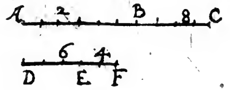
12



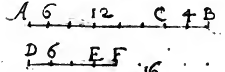
13



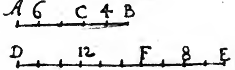
14



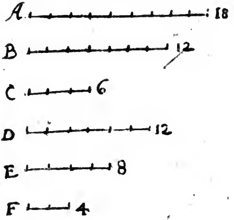
15



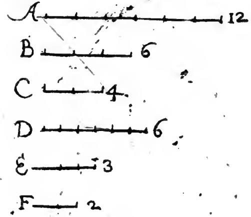
16



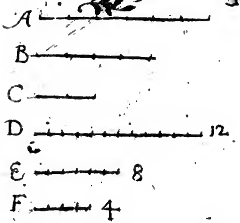
17



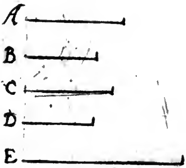
18



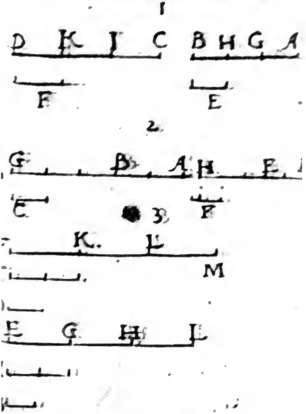
19



20

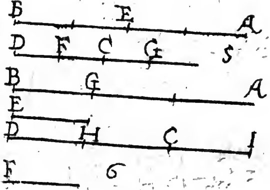


Propositiones.


1
D K I C B H G A
F E
2
G B A H E
C F
3
K L
M
E G H L



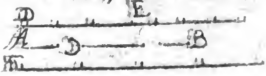
4



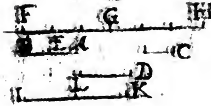
5

6

7



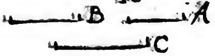
8



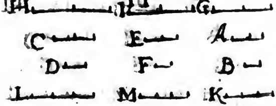
9

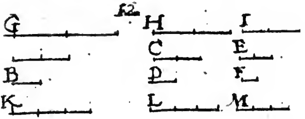


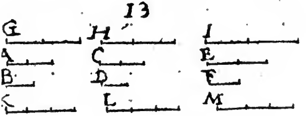
10

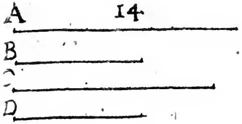


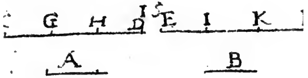
11



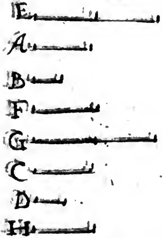

12
G H I
C E
B D F
K L M


13
G H I
A C E
B D F
K L M

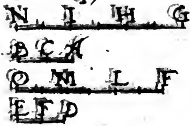

14
A
B
C
D


15
G H D E I K
A B

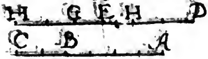
16



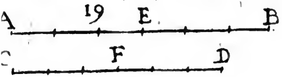
17



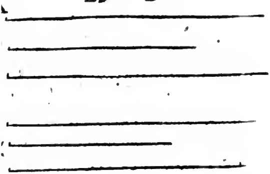
18

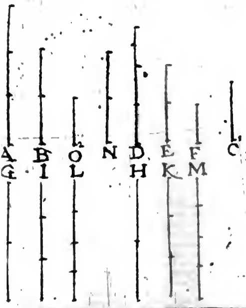


19

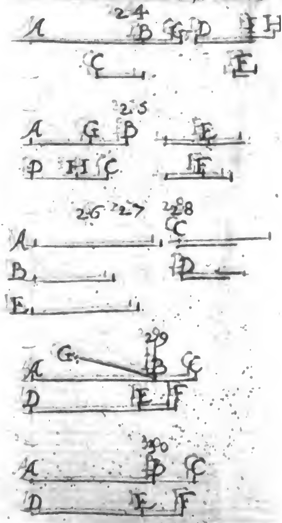


20 21

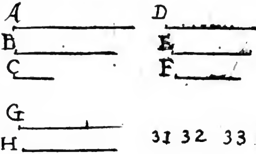




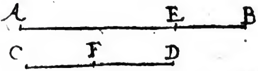
22. 23



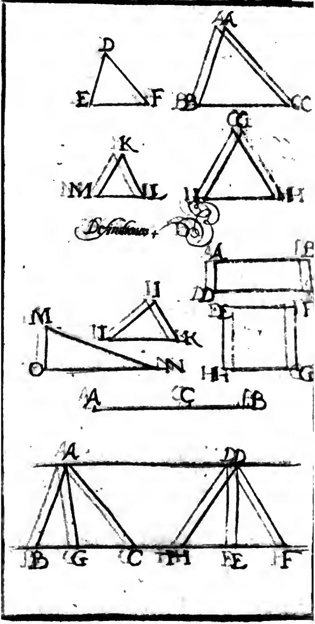
A B G D I H
C E
A G B E
D H C F
A B E
C D
G
A B C
D E F
A B C
D E F

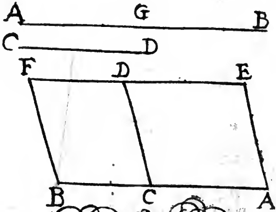


31 32 33 34

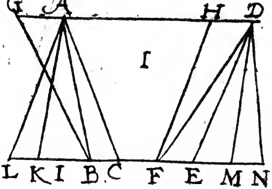


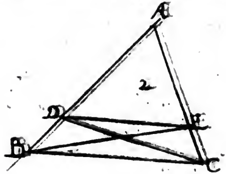
Libri Sexti Definitiones

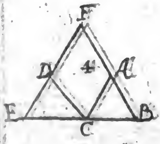

D
E F
A B C
K
M L
G
H H
Definitiones
A B
D
E F
H G
I
H K
M
O N
A C B
A D
B G C H E F

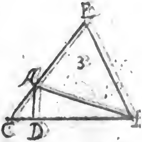


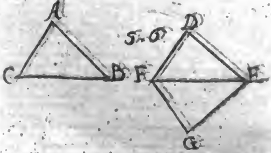
Propositiones

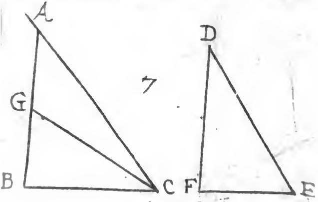


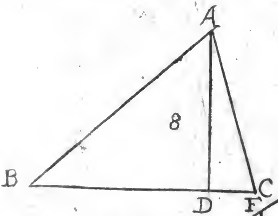

A
2
D
E
B
C

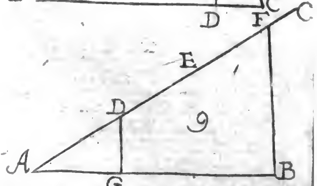

F
D
4
A
E
C
B

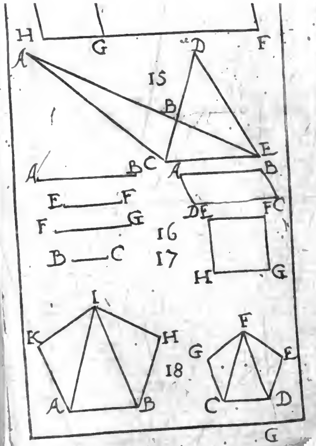

E
3
A
C
D

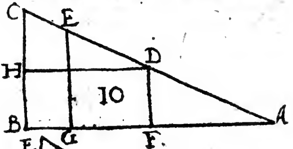

A
C
B
5. 6
D
F
E
G

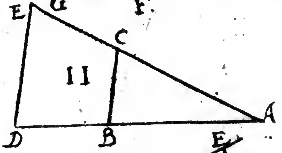

A
D
7
G
B
C
F
E

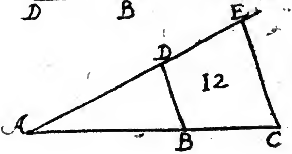

A
8
B
D
C

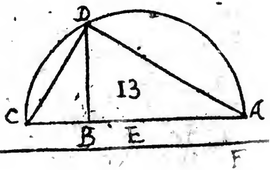

F
C
E
D
9
A
G
B

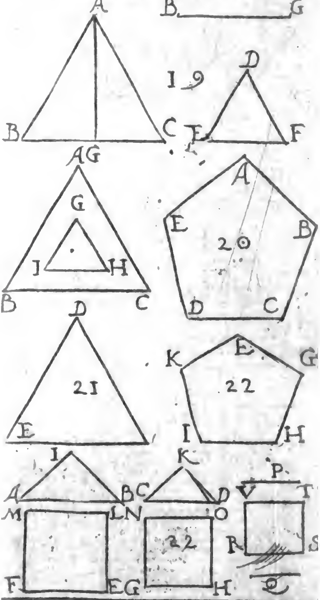

H G D F
A 15 B
C E
A B A B
E F
F G 16
B C 17
D E F C
H G
I
K H
G F E
18
A B C D
G

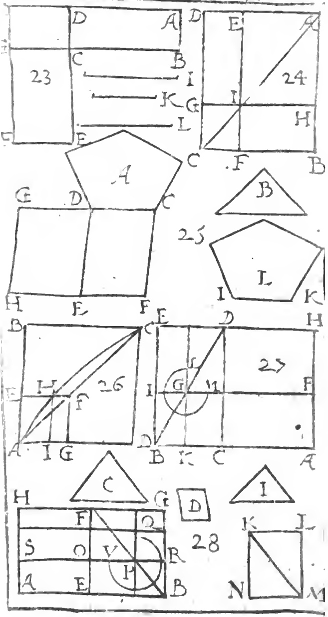

C
E
D
H
10
B
G
F
A

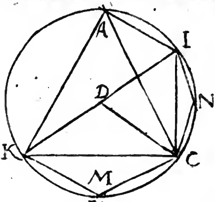

E
C
11
A
D
B


E
D
12
A
B
C

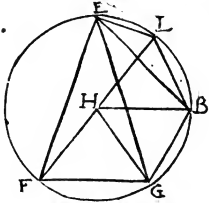

D
13
C
A
B
E
F


19
20
21
22
22


23
D A
C B
I
K
L
E
D
E A
24
I G
H
C F B
A
G D C
25
B
L
I K
H E F
B C E D H
H F 26
E
A I G
25
I G M F
D
B K C A
C
G
D
I
H
F Q
28
S O V R
P
A E B
K L
N M

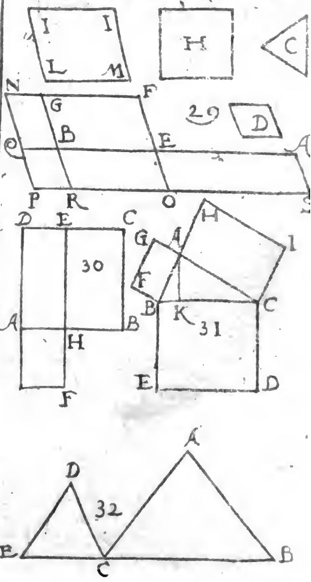


33



L. D. O. M.

FINIS.


I
I
L
M
H
C
N
G
F
29
D
B
E
A
P
R
O
S
D
E
C
30
A
B
H
F
G
A
H
I
F
B
K
C
31
E
D
A
D
32
E
C
B